

I. rész

1. A Bergengóc ötvösök kétféle fémből készítik ékszereiket.

A holdfém sűrűsége 5000 kg/m^3 , beszerzési ára 1000 ft/g (a „ft” a Bergengóc fizetőeszköz, a fémtallér rövidítése).

A napfém sűrűsége 6000 kg/m^3 , beszerzési ára 2000 ft/g .

A fémekből kétféle ötvözetet készítenek. Az első ötvözet 1 cm^3 -éhez $0,6 \text{ cm}^3$ holdfém és $0,4 \text{ cm}^3$ napfém használnak fel, míg a második ötvözet 1 cm^3 -éhez $0,4 \text{ cm}^3$ holdfém és $0,6 \text{ cm}^3$ napfém használnak fel (az ötvözés során nem kell anyagvesztéssel számolni).

a) Mennyi a kétféle ötvözet grammonkénti anyagköltsége?

Az elkészült ékszerek árát úgy kalkulálják, hogy az ékszer grammban adott tömegét megszorozzák az adott ötvözet grammonkénti anyagköltségével, és erre tesznek még rá 20%-ot.

b) Mennyi annak az ötvösnek a haszna, aki a $6,3$ grammos első ötvözetből álló nyakláncot tévedésből úgy adja el, mintha a második ötvözetből készült volna? (11 pont)

Megoldás. a) A kétféle fém cm^3 -enkénti anyagköltsége:

$$a_1 = 1000 \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}} \right) \cdot 5 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right) = 5000 \left(\frac{\text{ft}}{\text{cm}^3} \right) \quad \text{és}$$

$$a_2 = 2000 \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}} \right) \cdot 6 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right) = 12\,000 \left(\frac{\text{ft}}{\text{cm}^3} \right).$$

A két ötvözet cm^3 -enkénti tömege és anyagköltsége:

$$m_1 = 0,6 \left(\text{cm}^3 \right) \cdot 5 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right) + 0,4 \left(\text{cm}^3 \right) \cdot 6 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right) = 5,4 \text{ g} \quad \text{és}$$

$$k_1 = 0,6 \left(\text{cm}^3 \right) \cdot 5000 \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}} \right) + 0,4 \left(\text{cm}^3 \right) \cdot 12\,000 \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}} \right) = 7800 \text{ ft}, \quad \text{illetve}$$

$$m_2 = 0,4 \left(\text{cm}^3 \right) \cdot 5 \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}} \right) + 0,6 \left(\text{cm}^3 \right) \cdot 6 \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}} \right) = 5,6 \text{ g} \quad \text{és}$$

$$k_2 = 0,4 \left(\text{cm}^3 \right) \cdot 5000 \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}} \right) + 0,6 \left(\text{cm}^3 \right) \cdot 12\,000 \left(\frac{\text{ft}}{\text{g}} \right) = 9200 \text{ ft}.$$

Így a grammonkénti anyagköltségek:

$$k_{1\text{g}} = \frac{7800 \text{ ft}}{5,4 \text{ g}} \approx 1444,4 \frac{\text{ft}}{\text{g}}, \quad \text{és} \quad k_{2\text{g}} = \frac{9200 \text{ ft}}{5,6 \text{ g}} \approx 1642,9 \frac{\text{ft}}{\text{g}}.$$

b) $6,3$ gramm anyagköltsége az első ötvözetből:

$$\frac{7800 \text{ ft}}{5,4 \text{ g}} \cdot 6,3 \text{ g} = 9100 \text{ ft}.$$

A nyaklánc eladási ára:

$$\frac{9200 \text{ ft}}{5,6 \text{ g}} \cdot 6,3 \text{ g} \cdot 1,2 = 12\,420 \text{ ft}.$$

Így az ötvös haszna: $12\,420 - 9100 = 3320 \text{ ft}$.

2. Hány olyan (egybevágóságtól eltekintve) különböző téglalap van, melynek oldalai (cm-ben) egész számok, míg területe és kerülete (cm^2 -ben és cm-ben) 100-nál nem nagyobb négyzetszám? (12 pont)

Megoldás. A téglalap oldalai: $a \leq b$, így $a \leq 10$. A területre és a kerületre: $a \cdot b = n^2 \leq 100$ és $2(a+b) = k^2 \leq 100$, így $nk \leq 10$.

I. Ha $a = b$, akkor a téglalap négyzet, így a terület mindig négyzetszám, a kerület pedig $4a = k^2$ miatt pontosan akkor négyzetszám, ha $a = b$ négyzetszám. Vagyis az 1×1 -es, 4×4 -es, 9×9 -es téglalap megfelelő.

II. Ha $a < b$, akkor $a \leq 9$ is teljesül. Az esetet két részre osztjuk:

II.1. Ha $a = 1$, akkor $b = n^2$, és a kerületből $2 + 2n^2 = k^2$. Mivel ekkor k páros négyzetszám, így 4-gyel is osztható, de ez csak akkor lehet, ha n páratlan. A lehetséges eseteket ($n = 3, 5, 7, 9$) végigpróbálva csak $n = 7$ ad jó megoldást. Ekkor $a = 1$, $b = 7^2 = 49$, vagyis az 1×49 -es téglalap is jó.

II.2. Ha $1 < a < b$, akkor a az n^2 -nek egy n -nél kisebb pozitív osztója és $b = \frac{n^2}{a}$. Ez az a érték az $n = 2, 3, 5, 7$ prímekek esetén csak $a = 1$ lehet, ezt pedig már megvizsgáltuk. Nézzük végig a többi esetet is:

Ha $n = 4$: $a = 2$ esetén $2(a + b) = 2(2 + 8) = 20 \neq k^2$.
 Ha $n = 6$: $a = 2$ esetén $2(a + b) = 2(2 + 18) = 40 \neq k^2$, míg
 $a = 3$ esetén $2(a + b) = 2(3 + 12) = 30 \neq k^2$, míg
 $a = 4$ esetén $2(a + b) = 2(4 + 9) = 26 \neq k^2$.
 Ha $n = 8$: $a = 2$ esetén $2(a + b) = 2(2 + 32) = 68 \neq k^2$, míg
 $a = 4$ esetén $2(a + b) = 2(4 + 16) = 40 \neq k^2$.
 Ha $n = 9$: $a = 3$ esetén $2(a + b) = 2(3 + 27) = 60 \neq k^2$.
 Ha $n = 10$: $a = 2$ esetén $2(a + b) = 2(2 + 50) = 104 > 100$, míg
 $a = 4$ esetén $2(a + b) = 2(4 + 25) = 58 \neq k^2$, míg
 $a = 5$ esetén $2(a + b) = 2(5 + 20) = 50 \neq k^2$.

Vagyis összesen négy ilyen téglalap van, ezek méretei: 1×1 , 4×4 , 9×9 , és 1×49 .

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} a) \log_4(x+1) + \log_4(x+2) &= \log_2 \sqrt{6}, \\ b) \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 7x + 12} &= 1. \end{aligned} \quad (14 \text{ pont})$$

Megoldás. A logaritmus definíciója miatt az $x + 1 > 0$ feltételnek teljesülnie kell, amiből $x > -1$. Használva a logaritmus azonosságait, a jobb oldalt is 4-es alapra alakítva:

$$\log_4((x+1)(x+2)) = \log_4 6.$$

Mivel a logaritmus-függvény szigorúan monoton függvény, innen $(x+1)(x+2) = 6$, és így $x^2 + 3x - 4 = 0$, amiből $x_1 = 1$ és $x_2 = -4$ adódik.

Ezek közül csak az első megoldás megfelelő, vagyis az egyenlet megoldása: $x = 1$.

b) A törtek számlálóit és nevezőit szorzattá alakítva:

$$\frac{(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} - \frac{(2x+4)(x-3)}{(x-3)(x-4)} = 1.$$

Innen $x \notin \{1; 2; 3; 4\}$.

Egyszerűsítve a törteket, majd a maradék nevezőkkel szorozva:

$$(2x-1)(x-4) - (2x+4)(x-2) = (x-2)(x-4).$$

Elvégezve a zárójelfelbontásokat:

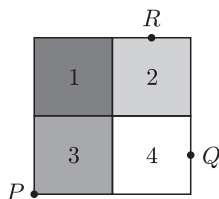
$$2x^2 - 9x + 4 - 2x^2 + 8 = x^2 - 6x + 8,$$

innen $x^2 + 3x - 4 = 0$, amiből $x_1 = 1$ és $x_2 = -4$ adódik.

Ezek közül csak a második megoldás megfelelő, vagyis az egyenlet megoldása: $x = -4$.

4. Peti tíz egyforma 2 egység élű építőkökből tornyot épít. A torony alapja $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ -es négyzet, de az egyes részeinek más-más a magassága.

(A felülnézeti ábra azt mutatja, hogy egy-egy rész hány darab $2 \times 2 \times 2 \text{ cm}$ -es kockából áll.)



Az ábrán látható P , Q , R pontok az egyes részek legmagasabban lévő építőkövének a felső lapján vannak. P az egyik négyzetlap csúcsa, míg Q és R a felső négyzetlapok megfelelő éleinek felezőpontjai.

a) Mekkora a (térbeli) PQR háromszög P -nél lévő szöge?

b) Peti 4 piros, 3 fehér, 2 zöld és 1 kék kockából építi meg a fenti tornyot.

Hányféle különböző felülnézeti ábra áll így elő? (A nem identikus egybevágósági transzformációval egymásba vihető ábrákat különbözőnek tekintjük.)

(14 pont)

Megoldás. a) Az a , b , c élhosszú téglatest testátlóinak hossza $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

A P , Q , és R pontok között futó térbeli szakaszok tekinthetők a megfelelő téglatestek testátlóinak: PQ -nál a téglatest élei 2, 4 és 1; QR -nél 3, 4 és 1; RP -nél pedig 3, 4 és 2.

Ezek alapján a P , Q , R pontok között lévő távolságok:

$$r = d(PQ) = \sqrt{21}, \quad p = d(QR) = \sqrt{26}, \quad q = d(RP) = \sqrt{29}.$$

Koszinusz-tétellel kiszámoljuk a P -nél lévő (p -vel szemközti) γ szöget:

$$p^2 = q^2 + r^2 - 2qr \cos \gamma, \quad \text{így} \quad \cos \gamma = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr} = \frac{29 + 21 - 26}{2\sqrt{29}\sqrt{21}} = \frac{12}{\sqrt{609}},$$

amiből $\gamma \approx 60,9^\circ$.

b) A piros, fehér, zöld, kék színeket P, F, Z, K betűvel jelölve a feladat ekvivalens azzal, hogy 4 db P, 3 db F, 2 db Z és 1 db K betűből hányféle 4 betűs „szó” képezhető. Vizsgáljuk meg a lehetséges eseteket aszerint, hogy a felülnézeti rajzon a színek hogy látszódnak.

I. Valamely színből 4 látható. Ekkor a színek száma rendre 4, 0, 0, 0. Mivel csak a P-ből van 4 darab, ezért ez 1 eset.

II. Valamely színből 3 látható. A színek száma ekkor 3, 1, 0, 0. Az első szín kettőből (P, F), a második szín háromból választható, vagyis hatféleképpen választhatunk színt. Ha a színeket már kiválasztottuk, a négybetűs szó $\frac{4!}{3!} = 4$ -féleképpen képezhető. Így itt $6 \cdot 4 = 24$ eset van.

III. Valamely színből 2 látható. Ekkor a színek száma 2, 2, 0, 0 vagy 2, 1, 1, 0. Az első esetben a két látható szín háromból (P, F, Z) választható $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen. Ha a színeket már kiválasztottuk, a négybetűs szó $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ -féleképpen képezhető. Így itt $3 \cdot 6 = 18$ eset van. A második esetben az első szín háromból (P, F, Z), a kimaradó (negyedik) szín szintén háromból választható, vagyis a színeket kilencféleképpen választhatjuk. Ha a színeket már kiválasztottuk, a négybetűs szó $\frac{4!}{2!} = 12$ -féleképpen képezhető, így itt $9 \cdot 12 = 108$ eset van.

IV. Végül, ha minden színből 1 látható, akkor nyilván $4! = 24$ eset van.

Vagyis összesen $1 + 24 + 18 + 108 + 24 = 175$ -féle felülnézeti ábra van.

II. rész

5. a) Igazoljuk, hogy a következő két sorozat konvergens, és közös a határértékük:

$$a_n = \frac{6n^2 - n - 1}{2n^2 + n + 1}, \quad b_n = \sqrt{n^2 + 6n + 12} - n.$$

b) Igazoljuk, hogy a fenti a_n sorozat minden tagja kisebb a fenti b_n sorozat valamennyi tagjánál. (16 pont)

Megoldás. a) A számláló és a nevező minden tagját osztva n^2 -tel:

$$a_n = \frac{6n^2 - n - 1}{2n^2 + n + 1} = \frac{6 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Mind a számlálóban, mind a nevezőben az első tagok kivételével nullsorozatról van szó, így $a_n \rightarrow \frac{6}{2} = 3$.

A másik sorozatot a konjugáltjával bővítve:

$$b_n = \frac{(\sqrt{n^2 + 6n + 12} - n)(\sqrt{n^2 + 6n + 12} + n)}{\sqrt{n^2 + 6n + 12} + n}.$$

Innen:

$$b_n = \frac{6n + 12}{\sqrt{n^2 + 6n + 12} + n} = \frac{6 + \frac{12}{n}}{\sqrt{1 + \frac{6}{n} + \frac{12}{n^2}} + 1} \rightarrow \frac{6}{1 + 1} = 3.$$

b) Az első sorozatnál mind a számláló, mind a nevező mindig pozitív, és mivel

$$6n^2 - n - 1 < 6n^2 + 3n + 3 = 3(2n^2 + n + 1),$$

azért $a_n < 3$ minden n -re.

A második sorozatnál

$$b_n = \sqrt{n^2 + 6n + 12} - n > \sqrt{n^2 + 6n + 9} - n = (n + 3) - n = 3.$$

Mivel a közös határértéknél az a_n sorozat minden tagja kisebb, míg a b_n sorozat minden tagja nagyobb, igazoltuk a b) pontot is.

6. A térbeli derékszögű-koordináta-rendszerben felvesszünk 3 piros pontot: $A(1; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, és $C(3; 0; 0)$, valamint 3 fehér pontot: $D(0; 1; 0)$, $E(0; 2; 0)$, és $F(0; 3; 0)$, valamint 3 zöld pontot: $G(0; 0; 1)$, $H(0; 0; 2)$, és $I(0; 0; 3)$.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk a kilenc pont közül hármat úgy, hogy a kiválasztott pontok egy háromszög csúcsai legyenek. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott háromszögnek vannak azonos színű csúcsai?

b) A kilenc pont közül válasszunk ki úgy néhányat, hogy az általuk meghatározott test térfogata a lehető legnagyobb legyen. Mely csúcsokat válasszuk ki, és mekkora lesz ekkor a kérdéses térfogat? (16 pont)

Megoldás. a) Akkor van (nem elfajuló) háromszög, ha a kiválasztott három pont nincs egy egyenesen. Ez csak három esetben (ABC , DEF , valamint GHI választása esetén) nem teljesül. Mivel 9 pont közül hármat $\binom{9}{3} = 84$ féleképp választhatunk ki, azért összesen $84 - 3 = 81$ olyan háromszög van, melyek csúcsai a 9 csúcs közül kerülnek ki.

Ezek közül rosszak azok, melyeknek három különböző színű csúcsa van. Ezek száma $3^3 = 27$. Így összesen $81 - 27 = 54$ olyan háromszög van, melynek vannak azonos színű csúcsai, így a kérdéses valószínűség: $\frac{54}{81} = \frac{2}{3}$.

b) Mivel az $ACDFGI$ test az összes többi testet tartalmazza, a kérdéses test ez a csonka gúla. A térfogata legegyszerűbben úgy számolható ki, hogy az $OCFI$ gúla térfogatából kivonjuk az $OADG$ gúla térfogatát (az O pont az origó). A térfogat így:

$$V = \frac{3^3}{6} - \frac{1^3}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

Vagyis a térfogat: $\frac{13}{3}$.

7. Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben a következő két kört:

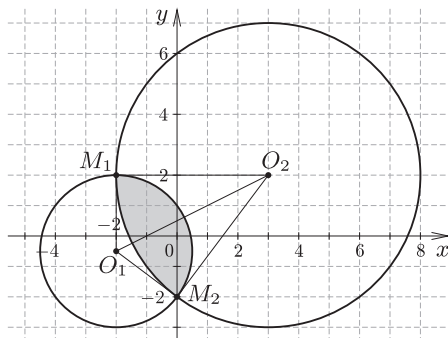
$$k_1: x^2 + 4x + y^2 + y = 2 \quad \text{és} \quad k_2: x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12.$$

Mekkora annak a síkrésznek a területe, amelyet mind a két kör lefed? (16 pont)

Megoldás. A körök középpontjainak és sugarainak kiszámításához átalakítjuk az egyenleteket. Jelölje a k_1 és a k_2 kör sugarát, illetve középpontját rendre r_1 és r_2 , illetve O_1 és O_2 . A k_1 kör esetén

$$(x + 2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

azaz $O_1\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $r_1 = \frac{5}{2}$.



A k_2 kör esetén $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$, azaz $O_2(3; 2)$, $r_2 = 5$.

Az első kör egyenletéből kivonva a második körét:

$$10x + 5y = -10, \quad \text{amiből} \quad y = -2x - 2.$$

Ezt behelyettesítve mondjuk az első egyenletbe: $x^2 + 4x + (-2x - 2)(-2x - 1) = 2$, amiből $x^2 + 4x + 4x^2 + 6x + 2 = 2$, vagyis $5x^2 + 10x = 0$, tehát $x_1 = -2$ és $x_2 = 0$ adódik.

Innen (behelyettesítéssel) a két kör metszéspontjai: $M_1(-2; 2)$, és $M_2(0; -2)$. Mivel

$$d(O_1O_2) = \sqrt{5^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{125}{4}}, \quad d(O_1M_2) = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2},$$

és

$$d(O_2M_2) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = \sqrt{25} = \sqrt{\frac{100}{4}},$$

emiatt (a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint) az $O_1M_2O_2$ -s derékszög. Innen az $M_2O_1M_1$ szöget α -val, az $M_1O_2M_2$ szöget β -val jelölve:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\frac{25}{4}}}{\sqrt{\frac{125}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 126,87^\circ,$$

és innen $\beta \approx 53,13^\circ$.

A kérdéses metszet területének kiszámításához az O_1 középpontú M_2M_1 ívhez tartozó körívk területét és az O_2 középpontú M_1M_2 ívhez tartozó körívk területét összeadjuk, és ebből kivonjuk az $O_1M_1O_2M_2$ derékszögű deltoid területét, melynek oldalai 5 és 2,5 egység hosszúak.

Vagyis a metszet területe:

$$T \approx \frac{2,5^2 \cdot \pi \cdot 126,87^\circ}{360^\circ} + \frac{5^2 \cdot \pi \cdot 53,13^\circ}{360^\circ} - 5 \cdot \frac{5}{2} \approx 6,01.$$

A két kör által közösen lefedett síkrész területe: $T \approx 6,01$.

8. A p paraméter mely értékeire lesz a

$$px^2 - (p-1)x - \frac{3}{4}p + \frac{1}{2} = 0$$

a) egyenletnek egy megoldása;

b) egyenletnek két megoldása, az egyik pozitív, a másik negatív;

c) egyenletnek gyöke $a-3$;

d) egyenlet gyökeinek az aránya $1:2$?

(16 pont)

Megoldás. a) Ha $p = 0$ (vagyis az egyenlet elsőfokú), akkor $x = -\frac{1}{2}$ (ekkor egy megoldás van.)

Különben az egyenlet másodfokú, és egy megoldása pontosan akkor van, ha az egyenlet diszkriminánsa 0:

$$\begin{aligned} D &= (p-1)^2 - 4 \cdot p \cdot \left(-\frac{3}{4}p + \frac{1}{2}\right) = \\ &= p^2 - 2p + 1 + 3p^2 - 2p = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Innen $p = \frac{1}{2}$. Vagyis $p = 0$, és $p = \frac{1}{2}$ esetén van az egyenletnek egy megoldása.

A b)-c)-d) pontok nem teljesülhetnek $p = 0$ esetén. Így a továbbiakban $p \neq 0$. Mivel D „szép”, adjuk meg a p segítségével az egyenlet két megoldását:

$$x_{1,2} = \frac{p-1 \pm |2p-1|}{2p}, \quad \text{innen} \quad x_1 = \frac{3p-2}{2p}, \quad x_2 = \frac{-p}{2p} = -\frac{1}{2}.$$

Innen egyszerűen adódnak a válaszok:

b) Mivel a negatív gyök megvan, így $\frac{3p-2}{2p} > 0$, és ebből $p > \frac{2}{3}$, vagy $p < 0$.

c) $-3 = \frac{3p-2}{2p}$, innen $p = \frac{2}{9}$.

d) Itt két eset van aszerint, hogy melyik gyök a nagyobb. Vagy $-1 = \frac{3p-2}{2p}$, és így $p = \frac{2}{5}$, vagy $-\frac{1}{4} = \frac{3p-2}{2p}$, és így $p = \frac{4}{7}$.

9. Kati „peches”-számai a 3-as, és a 7-es.

Egy nap 1-től kezdve elkezdte felírni a pozitív egészeket, de azokat a számokat, amikben volt hármas, vagy hetes jegy kihagyta.

a) Milyen számjegyekből áll a Kati által felírt 2015-dik szám?

b) Hányadik számként írta fel Kati a 2015-ös számot?

(16 pont)

Megoldás. Használjunk 8-as számrendszert. A Kati által felírt számok tekinthetők 8-as számrendszerbeli számoknak, csak jól el kell készítenünk a két számrendszer (a „rendes 8-as számrendszer”, és Katié) közötti „kódtáblát”. Ez a tábla a következő:

8-as számrendszerben	0	1	2	3	4	5	6	7
Katinál	0	1	2	4	5	6	8	9

Vagyis pl. a 8-as számrendszerbeli 53 megegyezik a Kati-féle 64 alakú számmal. Ezt a továbbiakban $53_8 = 64_K$ -ként fogjuk jelölni.

a) A 8-as számrendszerben a 2015-dik számot pl. ismételt 8-cal való maradékos osztásokkal meghatározhatjuk:

$$2015 = 251 \cdot 8 + 7, \quad 251 = 31 \cdot 8 + 3, \quad 31 = 3 \cdot 8 + 7, \quad 3 = 0 \cdot 8 + 3.$$

Vagyis $2015_{10} = 3737_8$. Mivel $3737_8 = 4949_K$, ezért a Kati listáján szereplő 2015-dik szám a 4949.

b) Mivel $2015_K = 2014_8 = 2 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 4 = 1036_{10}$, ezért Kati a 2015-t a saját listáján az 1036-dik számként írta fel.