

I. rész

1. Bizonyítsuk be, hogy $\lg 2$ irracionális.

(11 pont)

2. a) Hány különböző útvonalon juthatunk el a 8×8 -as sakktáblán a bal felső sarokban lévő, az *ábrán* K-val jelölt mezőről a jobb alsó sarokban lévő, V-val jelölt mezőre, ha bármely érintett mezőről csak az alatta lévő, vagy a jobb oldalán lévő mezőre léphetünk?

K							
			T				
							V

b) Hány olyan útvonal van ezek között, amely a kiinduló mezőtől számított negyedik oszlop és negyedik sor kereszteződésében lévő, T-val jelölt mezőt nem érinti?

(12 pont)

3. a) Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) végtelen számtani sorozat elemei természetes számok és ezek között van köbszám, akkor a sorozatnak végtelen sok köbszám eleme van.

b) Ha például a sorozatban szerepel a 125, és a sorozat differenciája 3, akkor lehet-e 125-nél kisebb köbszám a sorozatban?

(10 + 4 pont)

4. Bútorok hegyes sarkai sérülést okozhatnak. Különösen kisgyermekre jelentenek veszélyt egy asztal sarkai. Éppen ezért az $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ -es asztalunk lapját lekerekítettük az asztallap síkjára merőlegesen tartott fűrészszel olyan körívek mentén, amelyek középpontja egybeesik a négyzet alakú felület középpontjával. A négy oldalél mindegyikéből 80 cm hosszú egyenes szakasz maradt meg. Az egyenletes vastagságú asztallap tömege eredetileg 7 kg volt. Mekkora lett a tömege az átalakítás után?

(14 pont)

II. rész

5. Egy dobókockával kétszer dobunk.

a) Hány elemi esemény alkotja az eseményteret?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9?

c) Mekkora annak a feltételes valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9, ha az első dobott szám legalább 5?

d) Mekkora annak a feltételes valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9, ha az első dobott szám legfeljebb 4?

(2 + 4 + 5 + 5 pont)

6. Az $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x$ függvényről tudjuk, hogy inflexiós érintője párhuzamos az $x + y = 0$ egyenletű egyenessel. Határozzuk meg az a együttható értékét. Igazoljuk, hogy a függvény inflexiós pontja az x -tengelyen van. (16 pont)

7. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \leq \sqrt[4]{8},$$

ha $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(16 pont)

8. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott a beírt és a körülírt körének sugara. Mi a megoldhatóság feltétele? (Elegendő a szerkesztés menetét leírni.)

(16 pont)

9. Egy harcokcsizó alakulatnál szolgáló férfiak 40 fős csoportjában a testmagasság (x_i) és a testtömeg (y_i) adatait a következő táblázat tartalmazza:

testmagasság x_i [cm]	testtömeg y_i [kg]
162	70, 77
163	61
164	58, 64, 68
165	73
166	62, 65, 70
167	65, 66, 75, 80
168	63, 69, 71, 79
169	64, 70, 75, 76
170	58, 61, 71, 75, 75, 88
171	67, 68, 75, 77
172	61, 65, 70, 84
173	58, 77
174	63, 80

a) Ha a kg-ban mért testtömeget a m-ben mért testmagasság négyzetével elosztjuk, akkor az úgynevezett testtömeg-indexet kapjuk. A katonaeorvos egy bizonyos egész számnál nagyobb testtömeg-index esetén minősít valakit túlsúlyosnak. Mekkora ez az érték, ha az orvos szerint a szóbanforgó csoportban a túlsúlyosok aránya 10%?

b) Számítsuk ki az $\bar{x}$ és $\bar{y}$ átlagokat. Jelölje u azoknak az (x_i, y_i) értékpároknak a számát, amelyeknél a két adat az átlaghoz képest ugyanabban az irányban tér el, v pedig azoknak a számát, ahol az eltérés ellentétes irányú. Számítsuk ki az $\frac{u-v}{u+v}$ hányadost. Mire következtethetünk ebből? (8 + 8 pont)