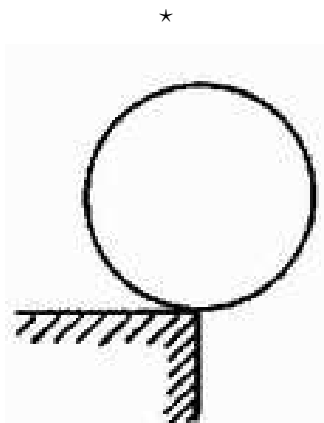


Egy golyót az asztal szélén, az ábrán látható helyzetben elengedünk. A golyó melyik helyzetében válik el az asztal szélétől, ha a

- súrlódás elhanyagolható,
- nagyon nagy?

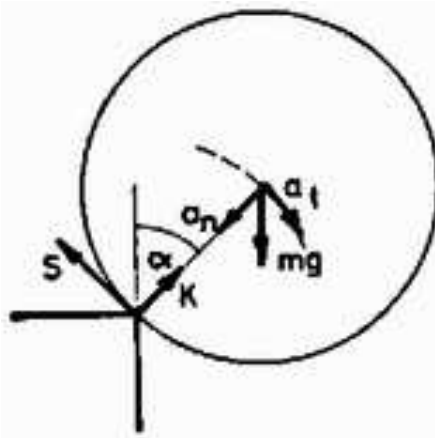


Vizsgáljuk meg a megoldás feltevéseinek realitását, azaz a a) esetbeli $\mu = 0$ és a b) esetbeli „igen nagy” értéket! A műszaki megoldás realitásához tartozik, hogy megvizsgáljuk a táblázatokban található legkisebb és legnagyobb súrlódási együtthatóval való számolás esetén a megoldás menet korrektségét, és összehasonlítjuk a realitásnak engedelményeket tevő egyszerűsítő feltevésekkel kapható megoldás menet korrektségével. Erre igen érdekes példa ez a feladat.

Az *Omacht–Sárközi: Műszaki Táblázatok* c. kötetben található legkisebb súrlódási együttható $\mu = 0,028$ (acél jégen), a legnagyobb pedig $\mu = 0,76$ (kő betonon). Úgy tűnik, hogy az első adat valóban közel áll a feltételezett 0 értékhez, és *elvileg* a másodiknál is vehetünk sokkal nagyobbat ($\mu > 1$ -nek sincs elvi akadály), de kérdés, meddig térhetünk el a reális értékektől, ha nem akarjuk „fogaskerekre” és „fogaslécra” átfogalmazni az ilyen típusú feladatokat? Erre a kérdésre csak úgy válaszolhatunk megnyugtatóan, hogy felveszünk egy tetszőleges μ értéket, és megvizsgáljuk, hogy ennek zérus felé való csökkentése ill. „végtelen” felé való növelése befolyásolja-e a megoldás menetének elvi tisztaságát.

A feladat közölt megoldásában a $\mu = 0$ feltevést elég jól tűrik a megoldásban alkalmazott fizikai törvények, azonban látni fogjuk, hogy a „ μ legyen igen nagy érték” csak akkor elegendően nagy, ha pont „végtelen”! Ez pedig már túl van a realitások nagyvonalúan kezelt határain is, mert a „végtelen” és az „igen nagy” igen távol van egymástól! A közölt megoldás feltétele, vagyis a golyó elválásig való *csúszásmentessége* csak $\mu = \infty$ esetben valósul meg, ugyanis véges súrlódási együttható esetén a golyó az $53,96^\circ$ elérése *előtt feltétlenül megcsúszik*, mert a 0-hoz tartó kényszererő képtelen biztosítani a csúszásmentességhez szükséges szöggyorsulást okozó tapadási súrlódási erőt. Így a megoldásban alkalmazott mechanikai energia megmaradására felírt egyenlet a golyó asztaltól való elválása előtt *érvényét veszti*, mert a csúszási súrlódás közben az energia egy része disszipálódik.

Ezen bevezető után gondolhatnánk, hogy a közölt megoldás teljesen hibás. Látni fogjuk azonban, hogy ez nincs így, de néhány gondolatot érdemes kifejteni a megoldás kapcsán. Egyszerre két dolgot vizsgálunk meg: egyrészt honnan kezdve elvi hibás a megoldás, ha nem utalunk az alkalmazott elhanyagolásra, másrészt hogy miért jó a közölt megoldás, ha utalunk rá (és megbecsüljük az elhanyagolás mértékét).



1. ábra

E célból határozzuk meg különböző értékű súrlódási együtthatók esetén a golyó megcsúszásához tartozó szögelfordulást! Egyenleteink a tiszta gördülésig érvényesek, a tapadási erőre vonatkozó egyenlőtlenség pedig éppen a

megcsúszás pillanatáig:

$$(1) \quad mg \sin \alpha - S = ma_t$$

(mozgásegyenlet a tömegközéppont tangenciális mozgására),

$$(2) \quad mg \cos \alpha - K = ma_n$$

(mozgásegyenlet a tömegközéppont normálirányú mozgására),

$$(3) \quad SR = \frac{2}{5}mR^2\beta$$

(forgatónyomaték-tétel),

$$(4) \quad S \leq \mu K$$

(a tapadási súrlódási erő értéke megcsúszás előtti pillanatig),

$$(5) \quad mgR(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2\omega^2$$

(mechanikai energia megmaradásának tétele),

$$(6) \quad a_t = R\beta$$

(a csúszásmentes gördülés szükséges feltétele),

$$(7) \quad v = R\omega$$

(a csúszásmentes gördülés elégséges feltétele).

Az egyenletrendszer megoldása $\cos \alpha$ -ra:

$$\cos \alpha = \frac{340\mu^2 \pm \sqrt{340^2\mu^4 - 4 \cdot (100\mu^2 - 4)(289\mu^2 + 4)}}{2(289\mu^2 + 4)}.$$

Készítsünk táblázatot arra vonatkozóan, hogy különböző súrlódási együtthatók esetén a golyó mekkora szögelfordulás után csúszik meg!

μ	0,01	0,028	0,1	0,2	0,5	0,76	1	2	10	∞
α	2,03°	5,56°	17,97°	29,07°	41,8°	45,66°	47,54°	50,7°	53,29°	53,96°

Az utolsó értékpár egzakt megoldással úgy kapható meg, hogy az egyenletrendszert μ -re oldjuk meg, és meghatározzuk α értékét, amelyhez $\mu = \infty$ tartozik:

$$\mu = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{289 \cos^2 \alpha - 340 \cos \alpha + 100}}.$$

Ebből a kifejezésből látszik, hogy a súrlódási együttható akkor válik végtelenné, ha a nevező zérussá válik, vagyis a

$$289 \cos^2 \alpha - 340 \cos \alpha + 100 = 0$$

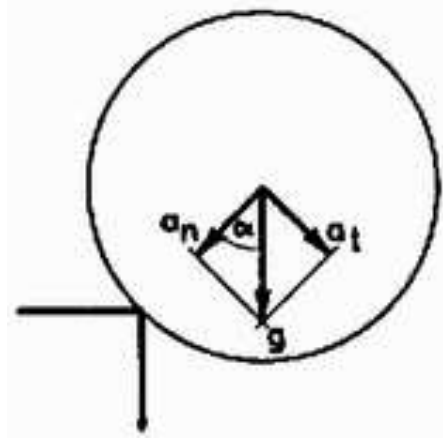
egyenlet megoldásaként kapott szög esetén. Innen

$$\cos \alpha = \frac{340 + \sqrt{340^2 - 400 \cdot 289}}{2 \cdot 289} = \frac{340}{278} = \frac{10}{17},$$

ahonnan $\alpha = 53,96^\circ$, ami éppen a golyó elfordulási szögének a megoldásban közölt értéke, vagyis a *golyó csak akkor nem csúszik meg az asztaltól való elválásig, ha a tapadási súrlódás együtthatója végtelen!* Ilyet pedig a természet nem produkál, mesterségesen valamiféle „bütyökkel” elő lehet ugyan állítani ennek megfelelő hatást, azonban ekkor már nem golyó a golyó.

Mint látható, a lecsúszó golyó a feladat *a)* kérdésében is kap egy kis forgási energiát, azonban ez valóban elhanyagolható, a *b)* kérdésre adott megfontolásban szereplő feltevés ($\mu = \infty$) azonban túl nagy elrugaszkodás a realitásoktól, így a megoldásban elvi problémák lépnek fel.

Most megmutatjuk, hogy ha megbecsüljük a megoldásban figyelmen kívül hagyott energiadisszipációt, ami az „igen nagy” de véges (pl. 0,76 értékű) súrlódási együttható miatt lép fel, és figyelembe vesszük a megoldáskor, igen kis numerikus eltérést kapunk a szélsőséges feltétellel kapotthoz képest.



2. ábra

Amikor a golyó elhagyja az asztal sarkát, tömegközéppontjának gyorsulása $a = g$. Ennek pályaérintő- és normál-irányú komponensei:

$$a_n = g \cos \alpha, \quad \text{illetve} \quad a_t = g \sin \alpha$$

nagyságúak. Innen az asztal sarkától a golyó középpontjáig húzott pályasugár elfordulása szögének tangense az elválás pillanatában:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{Rg \sin \alpha}{v^2},$$

ahonnan

$$(8) \quad \cos \alpha = \frac{v^2}{Rg}.$$

A golyó elválásának szögét ismerjük, ha a golyó tömegközéppontjának pillanatnyi sebességét ismerjük az elváláskor. Ennek meghatározásába szól bele a megcsúszás. A mechanikai energia megmaradásának tétele nem alkalmazható, a munka-tétel viszont érvényes, és fel is írhatjuk, ha valamilyen módon meg tudjuk határozni a csúszási súrlódási erő munkáját.

Írjuk fel a munkatételt a *megcsúszás pillanatától az asztal elhagyásáig*! Jelölje a megcsúszás kezdetén meglevő szögelfordulást α_0 , az elhagyás pillanataiban (teljes) szögelfordulást α , a golyó e két helyzete közötti inerciarendszerbeli szögelfordulását φ !

$$(9) \quad mgR(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) - \int_0^{\alpha - \alpha_0 - \varphi} SR d\alpha' = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2(\omega^2 - \omega_0^2),$$

ahol $\alpha' = \alpha - \alpha_0 - \varphi$, a relatív szögelfordulás, amivel a súrlódó felületek egymáson megtett útját mérjük a megcsúszástól az elválásig.

Ijesztőnek látszik a változó súrlódási erő munkájának integrállal való kiszámítása, valamint az, hogy semmiféle közvetlen kényszer-kapcsolatunk nincs a golyó tömegközéppontjának sebessége és *forgásának* (nem pályamozgásának!) szögsebessége között. Az előbbi gondot úgy kerülhetjük meg, hogy becslésünk során a kényszererő, ill. a vele arányos csúszási súrlódási erő szögelfordulástól való függését a várhatóan kicsiny szögtartományban lineáris függvénnyel közelítjük. A második problémát egyszerű megfontolással küszöbölhetjük ki. Ez a következő:

A csúszási súrlódási erő munkája esetünkben – mint ahogy (9)-ből látható – egy negatív és egy pozitív tag összege. A negatív tag abszolút értéke a nagyobb. Ez okozza az energiadisszipációt. A pozitív tag a golyó tömegközéppont körüli forgásának szögsebességét (energiáját) növeli, ez a tény azonban *nem befolyásolja* a tömegközéppont pályamozgásának sebességét, tehát az asztaltól való elválás körülményeit sem. A negatív tag játszik bele a golyó translációs sebességének alakításába.

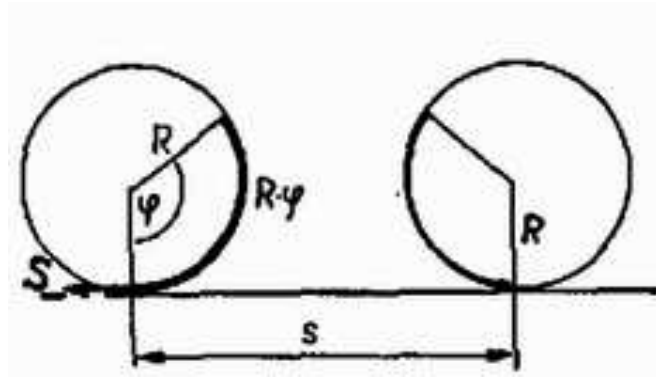
A csúszva-gördüléskor végzett súrlódási munka számítását egy egyszerű példával világítjuk meg.


$$W = -Ss_{rel} = -S(s - R\varphi),$$
$$W = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2(\omega^2 - \omega_0^2).$$
$$SR\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 (\omega^2 - \omega_0^2),$$

Alkalmazzuk a mi esetünkre, figyelembe véve, hogy a lineáris közelítés miatt a súrlódási erő átlagát a számtani középpel számíthatjuk, ami a teljes megszűnésig a maximális értékének a fele! A maximális érték pedig a megcsúszás kezdetén mérhető érték:

$$mgR(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) - \frac{S_0}{2}R(\alpha - \alpha_0) + \frac{S_0}{2}R\varphi = \\ = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2(\omega^2 - \omega_0^2).$$

$$\frac{S_0}{2} R \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 (\omega^2 - \omega_0^2),$$
$$v^2 = 2gR(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) - \frac{S_0}{m}R(\alpha - \alpha_0) + v_0^2.$$
$$\cos \alpha = 2(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) - \frac{S_0}{mg}(\alpha - \alpha_0) + \frac{v_0^2}{Rg}.$$



4. ábra

Figyelembe véve, hogy a maximális súrlódási erő a tapadás utolsó pillanatában érvényes

$$S_0 = \frac{2}{7}mg \sin \alpha_0$$

érték, és ugyanekkor az (5) egyenletből

$$v_0^2 = \frac{10}{7}Rg(1 - \cos \alpha_0),$$

a következő egyismeretlenes (transzcendens) egyenletet kapjuk:

$$3 \cos \alpha = 2 \cos \alpha_0 - \frac{2}{7} \sin \alpha_0 (\alpha - \alpha_0) + \frac{10}{7} (1 - \cos \alpha_0),$$

(ahol α radiánban értendő). Válasszuk a súrlódási együtthatót $\mu = 0,76$ -nak, akkor a konstansok értékei: $\alpha_0 = 45,66^\circ$, $\sin \alpha_0 = 0,7152$, $\cos \alpha_0 = 0,6989$, amivel egyenletünk így alakul:

$$3 \cos \alpha = 2 \cos 45,66^\circ - \frac{2}{7} \sin 45,66^\circ (\alpha - 45,66^\circ) + \frac{10}{7} - \frac{10}{7} \cos 45,66^\circ.$$

Ha α értékét fokban kívánjuk beírni, ez radiánra átszámítva $\pi/180$ -nal szorzandó, ezzel (a műveletek elvégzése után) a

$$\cos \alpha = 0,66359893 - 1,18882682 \cdot 10^{-3} \alpha \text{ (fokban)}$$

egyenlethez jutunk. (A számértékek 9 jegy pontosságát csak az elviek miatt tartottuk meg átmenetileg.) Rövid próbálkozás után (csak a $45,66^\circ < \alpha < 54^\circ$ szögekkel kell próbálkoznunk): $\alpha = 53,0959^\circ \approx 53,1^\circ$ eredményt kapjuk.

Ebben az eredményben a lineáris közelítés bizonytalansága benne van, ezért az $53,1^\circ$ -ot fogadjuk el. Örömmel látjuk, hogy az eredeti megoldásban közölt $53,96^\circ$ -os értéktől csak kicsit térünk el, vagyis a megcsúszás figyelmen kívül hagyása durván

$$\frac{53,96 - 53,1}{53,1} \approx 1,6\%$$

hibát okozott.