

I. rész

1. Számítsuk ki az A kifejezés pontos értékét:

$$A = \left(\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}} \right)^{-2} \cdot (14 - \sqrt{12} - \sqrt{96})^2 \cdot \left(\frac{2^2}{2015} \right)^{-1}.$$

(11 pont)

Megoldás.

$$\begin{aligned} \frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3} = (2-\sqrt{3})^2, \\ \frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}} &= \frac{(5-2\sqrt{6})^2}{25-24} = (5-2\sqrt{6})^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= (2-\sqrt{3}+5-2\sqrt{6})^{-2} \cdot 2^2(7-\sqrt{3}-2\sqrt{6})^2 \cdot \frac{2015}{2^2} = \\ &= (7-\sqrt{3}-2\sqrt{6})^{-2} \cdot (7-\sqrt{3}-2\sqrt{6})^2 \cdot 2015 = 2015. \end{aligned}$$

2. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig 25 játszmát fejeztek be, és mindenkinek még hátravan 4 játszmája. Hány sakkozó vesz részt a versenyen? (12 pont)

Megoldás. Legyen a résztvevők száma n , így mindenki $n-1$ mérkőzést játszik. Ha minden sakkozónak még 4 mérkőzése van hátra, akkor eddig mindenki $n-1-4 = n-5$ mérkőzést játszott. Ez összesen $\frac{n(n-5)}{2}$ mérkőzés. Tehát az $\frac{n(n-5)}{2} = 25$ egyenletet kell megoldanunk. Az $n^2 - 5n - 50 = 0$ másodfokú egyenlet pozitív megoldása $n = 10$. Tehát 10 sakkozó vesz részt a versenyen.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{625^x - 81^x}{375^x + 135^x} = \frac{2}{\sqrt{15}}.$$

(14 pont)

Megoldás. A hatványalapokat bontsuk prímtényezőik szorzatára, ezután az egyenlet:

$$\frac{(5^x)^4 - (3^x)^4}{(5^x)^3 \cdot 3^x + (3^x)^3 \cdot 5^x} = \frac{2}{\sqrt{15}}.$$

Vezessük be az $a = 5^x$ és $b = 3^x$ új változókat, ekkor

$$\frac{a^4 - b^4}{a^3 \cdot b + b^3 \cdot a} = \frac{2}{\sqrt{15}}.$$

Szoroztattá alakítva a számlálót és a nevezőt, majd egyszerűsítve ($a^2 + b^2 \neq 0$):

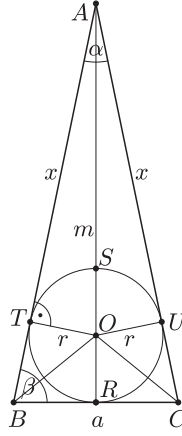
$$\begin{aligned} \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{ab(a^2 + b^2)} &= \frac{2}{\sqrt{15}}, \\ \frac{a^2 - b^2}{ab} &= \frac{2}{\sqrt{15}}, \\ \frac{a}{b} - \frac{b}{a} &= \frac{2}{\sqrt{15}}. \end{aligned}$$

Az $y = \frac{a}{b} = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ új változót bevezetve: $y - \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{15}}$, $\sqrt{15}y$ -nal ($y \neq 0$) beszorozva a $\sqrt{15}y^2 - 2y - \sqrt{15} = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

Az egyenlet megoldásai: $y_1 = -\frac{3}{\sqrt{15}}$ és $y_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Az első, negatív megoldás nem lehet pozitív szám hatványa, így a második megoldásból kapjuk az eredeti egyenlet egyetlen megoldását: $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. Mivel az $x \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x$ függvény szigorúan monoton függvény, ezért ebből $x = \frac{1}{2}$ következik.

4. Egy egyenlő szárú háromszög súlypontja illeszkedik a háromszög beírható körére. Mekkora a háromszög szögei? Bizonyítsuk be, hogy a beírt kör szárazon lévő két érintési pontja és a száraz közös végpontja három egyenlő részre osztja a háromszög területét. (14 pont)

Megoldás. Az S pont illeszkedik az alaphoz tartozó magasságra és a beírt körre. Mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalat, így a magasság harmada egyenlő a kör átmérőjével: $\frac{m}{3} = 2r$ vagyis $m = 6r$.



Az AOT derékszögű háromszögben $OT = r$ és $OA = m - r = 5r$, vagyis $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{5r} = 0,2$, amiből $\alpha \approx 23,7^\circ$, és innen $\beta \approx 78,46^\circ$.

A szimmetria és az érintőszakaszok egyenlősége miatt $AT = AU = x$, $BT = BR = CR = CU = \frac{a}{2}$.

A feladat második részének bizonyításához írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen:

$$T_{ABC\Delta} = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot 6r}{2} = 3ar,$$

másrészt

$$T_{ABC\Delta} = 2T_{ATO\Delta} + 4T_{BRO\Delta} = 2 \cdot \frac{x \cdot r}{2} + 4 \cdot \frac{a \cdot r}{4} = xr + ar.$$

A kettőt egyenlővé téve kapjuk, hogy $3ar = xr + ar$, vagyis $2ar = xr$, amiből következik, hogy $2a = x$.

A háromszög kerülete:

$$K_{ABC\Delta} = 2x + 4 \cdot \frac{a}{2} = 2x + 2a = 3x.$$

Mivel $AT = AU = x$, az A , T és U pontok valóban harmadolják a háromszög területét.

II. rész

5. Vizsgáljuk meg az alábbi egyenlet megoldhatóságát az m paraméter függvényében:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 3m^2 = 4m(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$$

(16 pont)

Megoldás. Ismeretes, hogy $a \geq 0$ esetén $a + \frac{1}{a} \geq 2$, hasonlóan $a \leq 0$ esetén $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

Vezessük be az $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ új változót, ekkor $y \leq -2$ vagy $2 \leq y$, valamint

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = y^2.$$

Az egyenletünk az új változóval: $y^2 + 3m^2 = 4my$, rendezve $y^2 - 4my + 3m^2 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa: $D = 16m^2 - 12m^2 = 4m^2$, így $D \geq 0$. A megoldóképletet alkalmazva a két megoldás:

$$y_{1,2} = \frac{4m \pm \sqrt{16m^2 - 12m^2}}{2} = 2m \pm |m|,$$

ahonnan $y_1 = m$ és $y_2 = 3m$.

Nincs megoldása az egyenletnek, ha $m = 0$, mert $y = 0$ lenne.

Ha $0 < m$ és $3m < 2$, vagyis $m < \frac{2}{3}$, akkor nem lesz megoldás.

Hasonlóan, $m < 0$ és $-2 < 3m$, azaz $-\frac{2}{3} < m$ esetén szintén nem lesz megoldás.

Tehát nincs megoldása az egyenletnek, ha $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$.

Egy megoldást kapunk y -ra, ha $0 < m < 2$ és $2 \leq 3m$, vagyis $\frac{2}{3} \leq m < 2$, vagy ha $-2 < m < 0$ és $3m \leq -2$, vagyis $-2 < m \leq -\frac{2}{3}$.

Ilyenkor az eredeti egyenlet megoldásait a

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 3m, \quad \text{azaz a} \quad \operatorname{tg}^2 x - 3m \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

egyenlet megoldásával kapjuk. Az egyenlet diszkriminánsa $D = 9m^2 - 4 \geq 0$, amiből $|m| \geq \frac{2}{3}$, ami az m -re adott fenti feltételek esetén teljesül.

Ha $m \leq -2$ vagy $2 \leq m$, akkor mindkét y -ra kapott értéket visszahelyettesíthetjük, és a megoldásokat a $\operatorname{tg}^2 x - 3m \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0$ és a $\operatorname{tg}^2 x - m \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0$ egyenletek gyökei adják. Az egyenletek diszkriminánsát megvizsgálva, az $|m| \geq \frac{2}{3}$ és $|m| \geq 2$ feltételeket kapjuk a megoldhatóságra, melyek az m -re adott fenti feltételek esetén teljesülnek.

6. *A teafűből a forró vízben a kellemes ízekeket adó anyagok gyorsabban kioldódnak, mint a káros csersavak. Előfordul, hogy a teafüvet véletlenül hosszabb ideig hagyjuk a vízben, mint szükséges lenne, ilyenkor a csersavaktól keserű lesz a tea. Az időt percekben mérve, a $t \in [0, 30]$ intervallumon közelítsük a percenként kioldódó csersav mennyiségét a $v(t) = -t^3 + 25t^2 + 150t$ függvényvel. Hány százalékkal több csersav oldódik ki a teafűből, ha a szükséges 5 perc helyett 10 vagy 15 percig benne felejtjük a filtert a vízben?* (16 pont)

Megoldás. Számoljuk ki az 5 perc alatt kioldódó A mennyiséget:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 -t^3 + 25t^2 + 150t \, dt = \left[-\frac{t^4}{4} + 25 \cdot \frac{t^3}{3} + 150 \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^5 \approx \\ &\approx -156,25 + 1041,7 + 1875 = 2760,45. \end{aligned}$$

A 10 perc alatt kioldódó B mennyiség:

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{10} -t^3 + 25t^2 + 150t \, dt = \left[-\frac{t^4}{4} + 25 \cdot \frac{t^3}{3} + 150 \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^{10} \approx \\ &\approx -2500 + 8333,3 + 7500 = 13\,333,3. \end{aligned}$$

A 15 perc alatt kioldódó C mennyiség:

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{15} -t^3 + 25t^2 + 150t \, dt = \left[-\frac{t^4}{4} + 25 \cdot \frac{t^3}{3} + 150 \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^{15} \approx \\ &\approx -12\,656,25 + 28\,125 + 16\,875 = 32\,343,75. \end{aligned}$$

Ha 10 percre felejtjük a vízben a teafüvet, akkor

$$\frac{B - A}{A} = \frac{13\,333,3 - 2760,45}{2760,45} \approx 3,83 = 383\%-kal$$

több, ha pedig 15 percig, akkor

$$\frac{C - A}{A} = \frac{32\,343,75 - 2760,45}{2760,45} \approx 10,72 = 1072\%-kal$$

több csersav oldódik ki, mintha betartottuk volna az 5 percet.

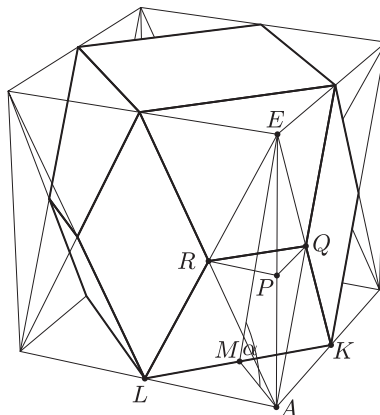
7. *Egyik lapjára állított 18 cm élhosszúságú kockából kiindulva bonbonos dobozt tervezünk. Az alap és fedőlap oldalefelező pontjait összekötjük a szemközti lap közelebbi csúcaival, az ábrának megfelelően. A keletkező háromszög alapú gúlákat elhagyjuk a kockából. Az így létrejött testet, a bonbonos dobozt, papírból fogjuk elkészíteni, 30% ragasztási felület, illetve hulladék ráhagyásával. Mennyi papírra lesz szükségünk? Mekkora lesz a doboz térfogata? Mekkora szöget zárnak be a trapéz alakú lapok egymással?* (16 pont)

Megoldás. Vizsgáljuk meg az egyik elhagyott háromszög alapú gúlát, $AKLE$ -t, ennek térfogata: $V = \frac{9 \cdot 9 \cdot 18}{2 \cdot 3} = 243 \text{ cm}^3$. A $PQRE$ gúla hozzá hasonló, a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{1}{2}$, a térfogatuk aránya $\lambda^3 = \frac{1}{8}$, így az $AKLPQR$ háromszög alapú csonka gúla térfogata

$$V_1 = \frac{7}{8}V = \frac{1701}{8}.$$

Nyolc darab ilyen csonkagúlát vágunk ki a kockából, így a doboz térfogata

$$V_D = 18^3 - 8 \cdot \frac{1701}{8} = 4131 \text{ cm}^3.$$



A doboz felszíne két négyzetből, nyolc egyenlő szárú trapézból és nyolc egyenlő szárú háromszögből áll.

A négyzet területe: $T_N = (9\sqrt{2})^2 = 162 \text{ cm}^2$.

A trapéz alapjai: $9\sqrt{2}$ és $\frac{9\sqrt{2}}{2}$, szárai

$$s = \sqrt{9^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9\sqrt{5}}{2},$$

magassága:

$$m = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{27\sqrt{2}}{4}.$$

Így a trapéz területe:

$$T_T = \frac{9\sqrt{2} + \frac{9\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{27\sqrt{2}}{4} = \frac{729}{8} \text{ cm}^2.$$

A háromszög területe:

$$T_H = \frac{9 \cdot 9}{2} = \frac{81}{2} \text{ cm}^2.$$

A doboz felszíne:

$$A = 2T_N + 8T_T + 8T_H = 2 \cdot 162 + 8 \cdot \frac{729}{8} + 8 \cdot \frac{81}{2} = 324 + 729 + 324 = 1377 \text{ cm}^2.$$

Tehát a ráhagyással együtt $1377 \text{ cm}^2 \cdot 1,3 = 1790,1 \text{ cm}^2$ papír szükséges a doboz elkészítéséhez.

A KL szakasz felezőpontja legyen az M pont, $AM = \frac{AK}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$. Az $\alpha = \angle AME$ a trapéz alakú oldal alaplappal bezárt szöge:

$$\tan \alpha = \frac{AE}{AM} = \frac{18\sqrt{2}}{9} = 2\sqrt{2}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 70,53^\circ.$$

A két trapéz alakú oldallap szöge ennek a szögnek a duplája: $2\alpha \approx 141,06^\circ$.

8. Mekkora szögben látszik az alábbi körök közös húrvja az origóból?

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y + 22 &= 0. \end{aligned}$$

(16 pont)

Megoldás. Teljes négyzetté alakítás után:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \quad \text{és} \quad (x-4)^2 + (y-4)^2 = 10.$$

Ebből leolvasható a két kör középpontja és sugara: $K_1(-2; 1)$, $r_1 = 5$, $K_2(4; 4)$, $r_2 = \sqrt{10}$.

A két kör egyenletét kivonva egymásból a $12x + 6y = 42$ egyenletet kapjuk, amiből $y = -2x + 7$ következik. Ez a húr egyenesének egyenlete. Ezt visszahelyettesítve az első kör egyenletébe az $(x+2)^2 + (-2x+6)^2 = 25$ másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek a megoldásai $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Ezeket visszahelyettesítve az egyenes egyenletébe kapjuk, hogy $y_1 = 1$, $y_2 = 5$. Tehát a közös húr végpontjainak koordinátái $A(1; 5)$ és $B(3; 1)$.

Az $\vec{OA}$ és $\vec{OB}$ vektorok szögét kell megadnunk:

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \cos \gamma = \sqrt{26} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \gamma.$$

Másrészt a koordinátákból: $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3 + 5 = 8$. Ezekből $\cos \gamma = \frac{8}{\sqrt{260}} \approx 0,4961$, amiből $\gamma \approx 60,26^\circ$.

9. A zöldséges 1 hetes, 2 hetes és 3 hetes narancsokat árul. Annak a valószínűsége, hogy egy 1 hetes narancs romlott, 0,01. Ez a valószínűség a tapasztalatok szerint hetente megduplázódik. A zöldségesnél jelenleg 25 kg 1 hetes, 17 kg 2 hetes és 6 kg 3 hetes narancs van. A narancsok tömege egyformának tekinthető, 5 db 1 kg. Egyik reggel a pakolásakor összekeveredtek a narancsok.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott narancs romlott?

b) Véletlenszerűen kiválasztottunk egy narancsot, ami jó. Mekkora a valószínűsége, hogy 3 hetes?

c) Vettünk 40 dkg narancsot. Mekkora a valószínűsége, hogy mind jó? És annak, hogy a fele romlott? (16 pont)

Megoldás. Jelölje A , B , illetve C rendre azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott narancs 1 hetes, 2 hetes, illetve 3 hetes; R pedig azt az eseményt, hogy egy narancs romlott. Az A , B és C események teljes eseményrendszert alkotnak.

Adott, hogy $P(R|A) = 0,01$, $P(R|B) = 0,02$, $P(R|C) = 0,04$. Mivel 5 darab narancs 1 kg, ezért 1 hetes narancsból 125, 2 hetesből 85, míg 3 hetesből 30 darab van, ez összesen 240 db narancs. Így a következőket tudjuk még:

$$P(A) = \frac{125}{240}, \quad P(B) = \frac{85}{240} \quad \text{és} \quad P(C) = \frac{30}{240}.$$

a) A teljes valószínűség tételét használva:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A)P(R|A) + P(B)P(R|B) + P(C)P(R|C) = \\ &= \frac{125}{240} \cdot 0,01 + \frac{85}{240} \cdot 0,02 + \frac{30}{240} \cdot 0,04 \approx 0,0173. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(C|\bar{R}) &= \frac{P(C\bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(C)P(\bar{R}|C)}{P(\bar{R})} = \frac{P(C)(1 - P(R|C))}{1 - P(R)} = \\ &= \frac{\frac{30}{240} \cdot (1 - 0,04)}{1 - 0,0173} \approx 0,1221. \end{aligned}$$

c) Felhasználjuk, hogy $P(\bar{R}|A) = 1 - P(R|A) = 0,99$, $P(\bar{R}|B) = 1 - P(R|B) = 0,98$ és $P(\bar{R}|C) = 1 - P(R|C) = 0,96$.

A két narancs kiválasztására a következő lehetőségek vannak: mindkettő 1 hetes; mindkettő 2 hetes; mindkettő 3 hetes; egyik 1, másik 2 hetes; egyik 1, másik 3 hetes; egyik 2, másik 3 hetes.

$$\begin{aligned} P(\text{mindkét narancs jó}) &= \\ &= \frac{\binom{125}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot P(\bar{R} | A)^2 + \frac{\binom{85}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot P(\bar{R} | B)^2 + \frac{\binom{30}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot P(\bar{R} | C)^2 + \\ &+ \frac{125 \cdot 85}{\binom{240}{2}} \cdot P(\bar{R} | A) \cdot P(\bar{R} | B) + \frac{125 \cdot 30}{\binom{240}{2}} \cdot P(\bar{R} | A) \cdot P(\bar{R} | C) + \\ &+ \frac{85 \cdot 30}{\binom{240}{2}} \cdot P(\bar{R} | B) \cdot P(\bar{R} | C) = \\ &= \frac{1}{240 \cdot 239} \cdot (125 \cdot 124 \cdot 0,99^2 + 85 \cdot 84 \cdot 0,98^2 + 30 \cdot 29 \cdot 0,96^2) + \\ &+ \frac{1}{240 \cdot 239} \cdot (2 \cdot 125 \cdot 85 \cdot 0,99 \cdot 0,98 + 2 \cdot 125 \cdot 30 \cdot 0,99 \cdot 0,96 + 2 \cdot 85 \cdot 30 \cdot 0,98 \cdot 0,96) = \\ &= \frac{55\,393,428}{240 \cdot 239} \approx 0,9657. \end{aligned}$$

A másik kérdésre a választ hasonló gondolatmenettel kapjuk meg:

$$\begin{aligned}
 &P(\text{a fele narancs jó}) = \\
 &= \frac{\binom{125}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot 0,99 \cdot 0,01 + \frac{\binom{85}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot 0,98 \cdot 0,02 + \frac{\binom{30}{2}}{\binom{240}{2}} \cdot 0,96 \cdot 0,04 + \\
 &+ \frac{125 \cdot 85}{\binom{240}{2}} \cdot (0,99 \cdot 0,02 + 0,01 \cdot 0,98) + \frac{125 \cdot 30}{\binom{240}{2}} \cdot (0,99 \cdot 0,04 + 0,01 \cdot 0,96) + \\
 &+ \frac{85 \cdot 30}{\binom{240}{2}} \cdot (0,98 \cdot 0,04 + 0,02 \cdot 0,96) = \\
 &= \frac{1622,642}{240 \cdot 239} \approx 0,0283.
 \end{aligned}$$