I. rész

1. *Juli néni két területen termesztett burgonyát, amelyek közül az egyik kétszer akkora volt, mint a másik. A burgonya betakarításához segítségül hívta rokonait, barátait. Az első napon az egész csapat a nagyobb területen dolgozott. A második napon a csapat fele átment a kisebb területre, a csapat másik fele tovább végezte a munkát a nagyobb területen, és így ezt a második nap végére be is fejezték. A kisebb területen nem végeztek, így a harmadik napon* 12 *embernek kellett dolgoznia ahhoz, hogy itt is befejezzék a betakarítást. Tudjuk, hogy mindhárom napon ugyanannyi ideig dolgoztak, és az emberek teljesítményét egyenlőnek vehetjük. Hány fős csapat dolgozott a betakarításnál?* (*11 pont*)

Megoldás. Legyen a csapat n fős, és legyen e egy ember napi munkamennyisége. A nagyobb földterület betakarításához szükséges munka mennyisége: $\left(n+\frac{n}{2}\right)\cdot e$, a kisebbhez szükséges pedig: $\left(\frac{n}{2}+12\right)\cdot e$.

Mivel a kisebb parcella területe a nagyobb parcella területének a fele, azért

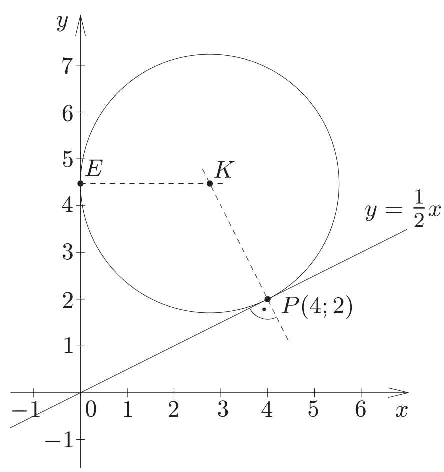
$$2\cdot\left(\frac{n}{2}+12\right)\cdot e=\left(n+\frac{n}{2}\right)\cdot e,\quad \text{azaz}\quad n+24=\frac{3}{2}n.$$

Innen $n=48$.

Tehát a betakarítást 48 fő végezte.

2. *Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyik a $P(4;2)$ pontban érinti az $y=\frac{1}{2}x$ egyenest, valamint érinti az y tengelyt.* (*13 pont*)

Megoldás. Készítsük el a szükséges *1. ábrát.* Ha a keresett kör a megadott egyenest a P pontban érinti, akkor a K középpontja rajta van az egyenesre P-ben állított merőleges egyenesen.



1. ábra

A megadott egyenes meredeksége: $m=\frac{1}{2}$, így a rá merőleges egyenesek meredeksége: $m^*=-2$. Ezzel a PK egyenes egyenlete: $y-2=-2\cdot(x-4)$, azaz $y=-2x+10$. Ezek szerint, ha a K középpont első koordinátája x_0, akkor $K(x_0;-2x_0+10)$.

A feltételek szerint $KE=KP$, azaz

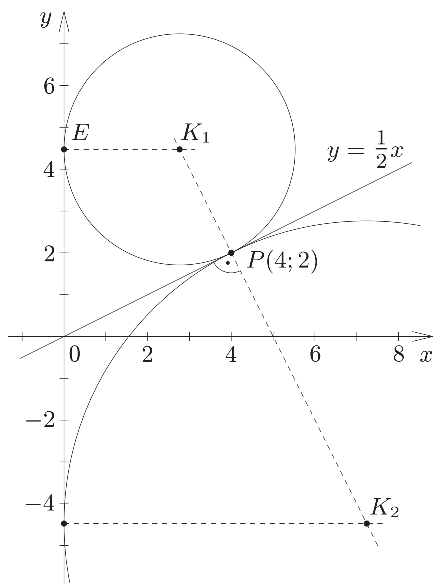
$$x_0=\sqrt{(x_0-4)^2+(-2x_0+8)^2},$$

$$x_0^2=x_0^2-8x_0+16+4x_0^2-32x_0+64,$$

$$x_0^2-10x_0+20=0,$$

$$(x_0)_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-80}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{20}}{2}=5\pm\sqrt{5}.$$

A feladatnak két megoldása van, amit a *2. ábra* szemléltet.



2. ábra

A körközéppontok: $K_1\left(5-\sqrt{5}; 2\sqrt{5}\right)$, $K_2\left(5+\sqrt{5}; -2\sqrt{5}\right)$. A feltételeknek eleget tevő körök egyenletei:

$$\left(x-\left(5-\sqrt{5}\right)\right)^2+\left(y-2\sqrt{5}\right)^2=\left(5-\sqrt{5}\right)^2,$$

$$\left(x-\left(5+\sqrt{5}\right)\right)^2+\left(y+2\sqrt{5}\right)^2=\left(5+\sqrt{5}\right)^2.$$

3. *a) Egy* 12 cm *belső sugarú, egyenes henger alakú fazékban* 18 cm *magasan áll a leves. Ezt a levest egy téglatest alakú műanyag edénybe szeretnénk önteni és hűtőszekrénybe helyezni. Az edény belső élei* 26 cm, 22 cm *és* 16 cm *hosszúak. Belefér-e a leves ebbe az edénybe?* (*5 pont*)

b) Egy 10 cm *sugarú,* 8 cm *magas egyenes henger alakú gyertyát felolvasztunk, és olyan kisebb,* 6 cm*-es sugarú, egyenes henger alakú gyertyákat szeretnénk önteni belőle, melyek felszínének mérőszáma egyenlő térfogatuk mérőszámával. Hány darab kis gyertyát tudunk így készíteni?* (*8 pont*)

Megoldás. *a)* A leves térfogata: $12^2\cdot\pi\cdot 18\approx 8143\ \mathrm{cm}^3$. A műanyag edény térfogata: $26\cdot 22\cdot 16=9152\ \mathrm{cm}^3$. Tehát a leves belefér a műanyag edénybe.

b) Az eredeti nagy gyertya térfogata: $V_1=10^2\cdot\pi\cdot 8\approx 2513{,}3\ \mathrm{cm}^3$. Ha a kiöntendő kis gyertyák sugara 6 cm, magasságuk m, és felszínük mérőszáma egyenlő térfogatuk mérőszámával, akkor

$$6^2\cdot\pi\cdot m=2\cdot\pi\cdot 6\cdot(m+6),\quad \text{azaz}\quad 6m=2m+12,$$

ahonnan $m=3$.

A kiöntendő kis gyertyák térfogata: $V_2=6^2\cdot\pi\cdot 3\approx 339{,}3$. A kiönthető kis gyertyák száma:

$$\frac{V_1}{V_2}\approx\frac{2513{,}3}{339{,}3}\approx 7{,}4.$$

Tehát a nagy gyertyából az adott feltételek mellett 7 db kis gyertyát lehet kiönteni.

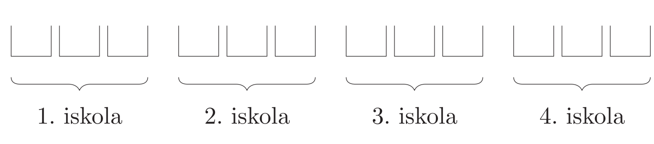
4. *Egy iskolák közötti csapatverseny döntőjébe* 4 *iskola jutott, iskolánként* 3 *fős csapattal. A verseny előtt a résztvevők felsorakoztak egy fotózáshoz.*

a) Hányféleképpen állhattak sorba a versenyzők, ha azt akarták, hogy az azonos iskolába járó diákok egymás mellett álljanak? (*4 pont*)

b) A 12 *résztvevő között* 4 *lány és* 8 *fiú volt. Hányféleképpen állhattak sorba a versenyzők a fotózáshoz, ha azt akarták, hogy a* 4 *lány középen álljon egymás mellett?* (*4 pont*)

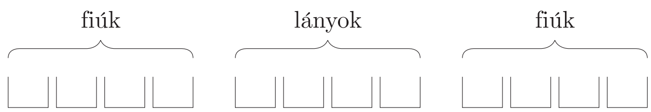
c) Egy másik, iskolák közötti csapatversenyen 4 *fős csapatok vettek részt (egy iskola csak egy csapattal nevezhetett). E verseny kezdetén a résztvevők bemutatkoztak egymásnak; minden diák minden olyan diákkal kezet fogott, aki nem iskolatársa, így összesen* 336 *kézfogásra került sor. A versenyt követő búcsúesten minden diák minden diákkal koccintott egy pohár üdítővel. Hány koccintásra került sor ekkor?* (*6 pont*)

Megoldás. *a)* Először a 4 iskolát állítjuk sorrendbe. Ezt 4!-féleképpen tehetjük meg.



Bárhogyan is állítottuk sorrendbe a 4 iskolát, az 1., a 2., a 3. és a 4. iskola három-három diákját 3!-féleképpen állíthatjuk sorba. Ezek szerint a kívánt módon a 12 diákot $4! \cdot (3!)^4 = 24 \cdot 6^4 = 31\,104$-féleképpen állíthatjuk sorba.

b) A fiúkat összesen 8!-féleképpen állíthatjuk sorba. Bárhogyan is állítjuk sorba a 8 fiút, közéjük (középen) a 4 lányt 4!-féleképpen helyezhetjük el.



Tehát a feltételeket figyelembe véve a 12 diákot összesen $8! \cdot 4! = 967\,680$-féleképpen állíthatjuk sorba.

c) Legyen a versenyen résztvevő iskolák száma n. Ekkor a résztvevő diákok száma $4n$. Ha a versenyt megelőzően minden diák kézfogással bemutatkozott minden olyan diáknak, aki nem iskolatársa, akkor minden diák $4n-4$ diákkal fogott kezet. Mivel a $4n$ diák mindegyike ennyi kézfogást tett, azért a verseny előtt a kézfogások száma:

$$\frac{4n(4n-4)}{2} = 336,$$
$$16n^2 - 16n = 672,$$
$$n^2 - n - 42 = 0,$$
$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2},$$
$$n_1 = 7, \quad n_2 = -6.$$

A negatív gyök érdektelen számunkra, így azt kaptuk, hogy a résztvevő iskolák száma 7.

Ezek szerint a versenyen résztvevő diákok száma $7 \cdot 4 = 28$. Így a verseny végén – amikor mindenki mindenkivel koccintott egyszer – összesen $\dfrac{28 \cdot 27}{2} = 378$ koccintás hallatszott.

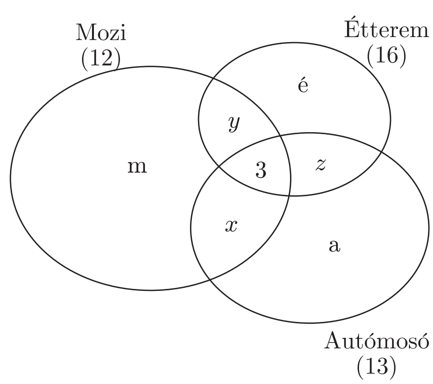
II. rész

5. *Egy ország öt nagyvárosában (A, B, C, D és E-ben) összesen 27 bevásárlóközpont működik. A-ban 7, B-ben 3, C-ben 3, D-ben 6 és E-ben 8. Közülük 12-ben van mozi, 16-ban van étterem, és 13-ban van autómosó szolgáltatás. 3 olyan bevásárlóközpont van, ahol mindhárom szolgáltatást nyújtják.*

a) A mozival rendelkező bevásárlóközpontok közül 5-ben nincs autómosó, az étteremmel rendelkezők közül pedig 5-ben van mozi. 9 olyan bevásárlóközpont van, melyekben e szolgáltatások közül csak étterem van. Hány olyan bevásárlóközpont van az öt városban, melyben pontosan két szolgáltatást nyújtanak e három közül? (*10 pont*)

b) Mutassuk meg, hogy ha a 27 bevásárlóközpont között 16 olyan van, amelyben csak egy szolgáltatást nyújtanak, akkor legalább 3 város rendelkezik olyan bevásárlóközponttal, melyben csak egy szolgáltatás van a fentiek közül. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Készítsünk egy halmazábrát (*1. ábra*), melyben a mozik, éttermek és autómosók számát szemléltetjük. A három halmaz metszetének 3 eleme van.

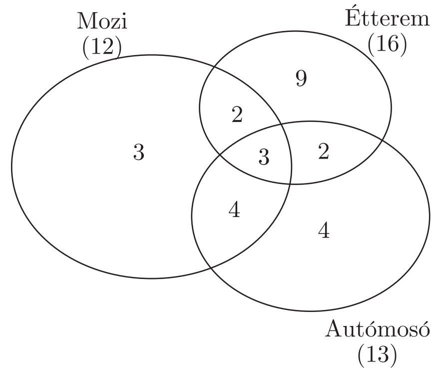


1. ábra

Mivel a mozival rendelkező bevásárlóközpontok közül 5-ben nincs autómosó, azért $\mathrm{m} + y = 5$, vagyis $x = 12 - (\mathrm{m} + y + 3) = 4$. Az étteremmel rendelkezők közül 5-ben van mozi, tehát $y + 3 = 5$, azaz $y = 2$, és ekkor $\mathrm{m} = 3$. 9 olyan bevásárlóközpont van, melyekben csak étterem van, vagyis $\mathrm{é} = 9$. Ezzel pedig $z = 2$, és így $\mathrm{a} = 4$.

Most már kitölthetjük a halmazábrát (*2. ábra*). A pontosan két szolgáltatással rendelkező bevásárlóközpontok száma:

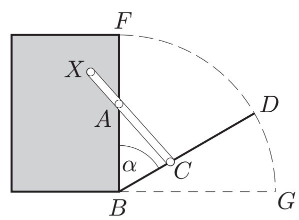
$$y + z + x = 2 + 2 + 4 = 8.$$



2. ábra

b) Ha a legtöbb bevásárlóközponttal rendelkező két város (A-ban 7, E-ben 8) mindegyikében minden bevásárlóközpontban csak egy szolgáltatást nyújtanának, akkor ez 15 bevásárlóközpont. Tudjuk, hogy a 27 bevásárlóközpont között összesen 16 olyan van, amelyben csak egy szolgáltatást nyújtanak. Ezek szerint mindenképpen kell még egy olyan városnak lennie, melyben van csak egy szolgáltatást nyújtó bevásárlóközpont.

6. *Egy szekrényhez erősített, lehajtható munkaasztalt látunk az* ábrán. *A BD lehajtható munkalapot az XC fémkar segítségével mozgathatjuk. Az A pontban levő szegecs a szekrény BF oldalába van erősítve, ezen a szegecsen csúszhat a fémkar. Tudjuk, hogy $BC = 36$ cm, $AB = 48$ cm. Felhajtott helyzetben a D és az X pontok egybeesnek az F ponttal. Lehajtott helyzetben a D és a G pontok, valamint az X és az A pontok is egybeesnek.*

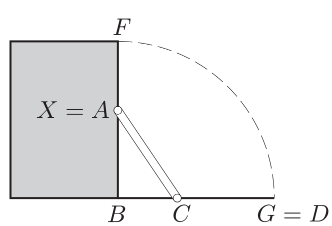


a) *Milyen hosszú az asztal BD oldala?* (*8 pont*)

b) *Milyen távol lesz az X pont a szekrény BF oldalától, ha az asztallapot B körül $\alpha = 60°$-kal lehajtjuk?* (8 pont)

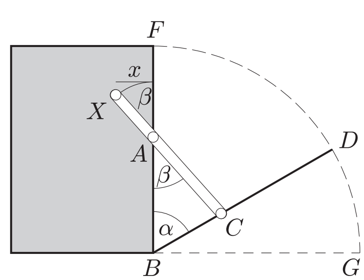
Megoldás. *a*) Képzeljük el a munkaasztalt lehajtott helyzetben (*1. ábra*). Ekkor a Pitagorasz-tétel alapján: $XB^2 + BC^2 = XC^2$, azaz $48^2 + 36^2 = XC^2$, ahonnan $XC = 60$ cm. A munkaasztal BG oldalának hossza egyenlő az FB oldal hosszával. Felhajtott állapotban

$$BD = BG = BF = XC + CB = 60 + 36 = 96 \text{ cm}.$$



1. ábra

b) Először számítsuk ki koszinusztétel segítségével az ABC háromszög AC oldalának hosszát, majd szinusztétellel a $BAC = \beta$ szöget. Ezek birtokában már könnyen meghatározhatjuk a *2. ábra* XTA derékszögű háromszögéből a keresett $XT = x$ szakasz hosszát.



2. ábra

Az ABC háromszögben

$$AC^2 = 48^2 + 36^2 - 2 \cdot 48 \cdot 36 \cdot \cos 60°,$$

$$AC^2 = 3600 - 1728 = 1872, \quad \text{ahonnan} \quad AC \approx 43{,}3.$$

Ugyancsak az ABC háromszögben:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 60°} = \frac{BC}{AC}, \quad \text{azaz} \quad \sin\beta = \frac{\sin 60° \cdot 36}{43{,}3} \approx 0{,}7200.$$

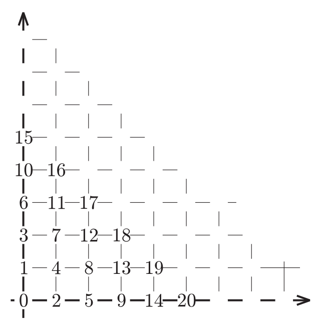
Az AXT derékszögű háromszög AX oldala:

$$AX = XC - AC = 60 - 43{,}3 \approx 16{,}7.$$

Ezzel $\sin\beta = \dfrac{x}{AX}$, azaz $0{,}7200 = \dfrac{x}{16{,}7}$, ahonnan $x \approx 12$.

Tehát az X pont a szekrény BF oldalától – az asztallap 60°-os lehajtása esetén – kb. 12 cm távol lesz.

7. *A derékszögű koordinátarendszer rácspontjaiba beírtuk a természetes számokat az* ábrán *látható módon. (A rácspont olyan pont, melynek mindkét koordinátája egész szám.)*



a) Milyen koordinátájú pontban van a 2010? *(9 pont)*
b) Milyen szám szerepel a $P(54; 72)$ *koordinátájú pontban?* *(7 pont)*

Megoldás. *a)* Tekintsük az y tengely egész koordinátájú pontjaiból kiinduló „ferde” sorokat, melyekben egymást követik a természetes számok. Az egyes ilyen ferde sorokban levő számok rendre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 stb. Észrevehetjük, hogy az y tengely $P(0; n)$ pontjából induló sor első száma egyenlő az előtte levő sorokban levő számok számának összegével, azaz

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Így a $P(0; n+1)$ koordinátájú ponttal kezdődő sor első száma:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ezek szerint ha a 2010 szám abban a ferde sorban van, melynek első tagja az y tengely $P(0; n)$ pontjában van, akkor

$$\frac{n(n+1)}{2} \le 2010 < \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad \text{azaz} \quad n^2 + n \le 4020 < n^2 + 3n + 2.$$

Az első egyenlőtlenségből $n \le 62{,}9$, a másodikból pedig $n > 61{,}9$. Tehát a 2010 az y tengely $P(0; 62)$ koordinátájú pontjából induló ferde sorban van, és az itt található szám:

$$\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953.$$

Mivel $2010 - 1953 = 57$, azért a $P(0; 62)$ pontból kiindulva 57 lépést kell tennünk jobbra és lefelé, hogy eljussunk a 2010 számhoz.

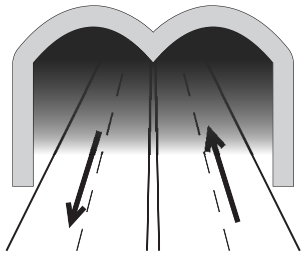
Tehát a 2010 szám a koordinátarendszer $Q(57; 5)$ koordinátájú pontjában van.

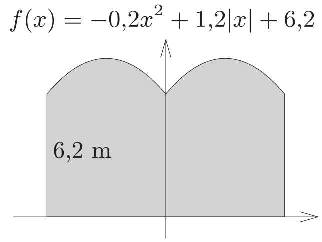
b) A $P(54; 72)$ koordinátájú pontból kiindulva, 54 lépést haladva „balra”, az y tengelyen a $(0; 72)$ koordinátájú pontba jutunk. Innen újabb 54 lépést haladva „felfelé” az y tengelyen eljutunk a $(0; 126)$ koordinátájú pontba. Ebben a pontban az előzőek alapján a $\dfrac{126 \cdot 127}{2} = 8001$ szám szerepel. Tehát a $P(54; 72)$ koordinátájú pont abban a ferde sorban van, amely első pontjának koordinátái $(0;126)$, a szám pedig a 8001. Innen 54-et lépve azt kapjuk, hogy a $P(54;72)$ koordinátájú pontban levő szám: $8001+54=8055$.

8. *Egy* 1240 m *hosszú alagút bejáratának keresztmetszetét látjuk az* ábrán *egy koordinátarendszerbe helyezve, ahol az egység mindkét tengelyen* 1 m. *Az alagút oldalfalai* 6,2 m *magasak. Az alagút tetejét jó közelítéssel az*

$$f(x)=-0{,}2x^2+1{,}2|x|+6{,}2$$

függvény grafikonjának egy darabja írja le.





a) Határozzuk meg az $f(x)$ *függvény e részének értelmezési tartományát és értékkészletét.* *(8 pont)*

b) Az alagút szellőzőrendszerét úgy szeretnék megtervezni, hogy 800 m^3*-enként legyen egy szellőző. Hány szellőzőt kell tervezni?* *(8 pont)*

Megoldás. *a)* Az $f(x)=-0{,}2x^2+1{,}2|x|+6{,}2$ függvény páros függvény, ezért az értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálatánál elegendő az $x\ge 0$ esetet vizsgálnunk.

Az értelmezési tartomány meghatározásához megoldjuk az $f(x)=6{,}2$ egyenletet, azaz $-0{,}2x^2+1{,}2x+6{,}2=6{,}2$. Innen $x(-0{,}2x+1{,}2)=0$, vagyis $x_1=0$ és $x_2=\dfrac{1{,}2}{0,2}=6$. Tehát az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya: $x\in[-6;6]$.

A függvény értékkészletének meghatározásához ki kell számítanunk a függvény minimumának és maximumának értékét. Az $f(x)=ax^2+bx+c$ hozzárendeléssel adott másodfokú függvény szélsőértéke az $x=-\dfrac{b}{2a}$ helyen van. Esetünkben a függvény szélsőértékhelye (ami most nyilvánvalóan maximumhely, mert $a<0$) az $x=-\dfrac{1{,}2}{-0{,}4}=3$ helyen található. A maximum értéke: $-0{,}2\cdot 9+1{,}2\cdot 3+6{,}2=8$. A minimum értéke: $f(-6)=f(0)=f(6)=6{,}2$. Tehát az $f(x)$ függvény értékkészlete: $f(x)\in[6{,}2;8]$.

b) Ki kell számítanunk az alagút légterének nagyságát. Ez az alagút keresztmetszetének és az alagút hosszának a szorzata. A keresztmetszetet úgy kaphatjuk meg ha integráljuk az $f(x)=-0{,}2x^2+1{,}2x+6{,}2$ függvényt a $[0;6]$ intervallumon, majd a kapott eredményt megszorozzuk 2-vel.

$$\int_0^6(-0{,}2x^2+1{,}2x+6{,}2)\,dx=\left[-0{,}2\cdot\frac{x^3}{3}+1{,}2\cdot\frac{x^2}{2}+6{,}2x\right]_0^6=$$

$$=-0{,}2\cdot\frac{6^3}{3}+1{,}2\cdot\frac{6^2}{2}+6{,}2\cdot 6=-14{,}4+21{,}6+37{,}2=44{,}4.$$

Tehát az alagút teljes keresztmetszete: 88,8 m^2. Így az alagút légterének nagysága: $1240\cdot 88{,}8=110\,112$ m^3.

Mivel 800 m^3-enként kell egy szellőző, azért összesen $\dfrac{110\,112}{800}\approx 137{,}64$, azaz 138 darabot kell tervezni.

9. *Négy különböző prímszámról az alábbiakat tudjuk: összegük* 77, *négyzeteik összege:* 4527. *Mennyi e négy prímszám szorzata?* *(16 pont)*

Megoldás. Legyen a négy különböző prímszám $p_1<p_2<p_3<p_4$. A feltételek szerint $p_1+p_2+p_3+p_4=77$ és $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2=4527$. Ha négy különböző prímszám összege páratlan, akkor az egyiknek párosnak kell lennie, így $p_1=2$. Ezzel $p_2+p_3+p_4=75$ és $p_2^2+p_3^2+p_4^2=4523$.

Egy prímszám 3-mal osztva 1 vagy 2 maradékot ad (kivétel a 3), vagyis $p=3k+1$ vagy $p=3k+2$. Ezek négyzete $p^2=9k^2+6k+1$ vagy $p^2=9k^2+12k+3+1$. Ezzel arra jutottunk, hogy bármely prímszám négyzete (kivéve a $p=3$ esetet) 3-mal osztva 1 maradékot ad. Mivel a jobb oldal 3-mal osztva 2 maradékot ad, így a bal oldalon valamelyik prímnek oszthatónak kell lennie 3-mal, azaz $p_2=3$. Ezzel a második egyenlőség így alakul: $p_3^2+p_4^2=4514$.

Most vizsgáljuk meg a prímszámok négyzetének utolsó számjegyét. A $p=2$ és $p=5$ esetek kivételével minden prímszám utolsó számjegye 1, 3, 7 vagy 9. Ezek négyzete 1, 9, 9, 1. Tehát minden prímszám (a 2 és az 5 kivételével) négyzetének utolsó jegye 1 vagy 9. Mivel ezek közül bármely kettőt összeadva az eredmény nem lehet 4, azért ha két különböző prímszám négyzetének összege 4-re végződik, akkor az egyiknek 5-nek kell lenni: $p_3=5$. Ekkor $p_4^2=4489$, ahonnan $p_4=67$, ami szintén prímszám.

Tehát a négy prímszám szorzata: $2\cdot 3\cdot 5\cdot 67=2010$.