

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. Határozzuk meg az összes olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre az $f([x]y) = f(x)[f(y)]$ egyenlőség teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ -re. (Itt $[z]$ a legnagyobb olyan egész számot jelöli, amely kisebb vagy egyenlő z -nél.)

Mészáros András megoldása. Az azonosan nulla függvény nyilván megoldás. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor van olyan t , amelyre $f(t) \neq 0$. Ekkor $[f(t)]$ sem lehet 0, hiszen $[f(t)] = 0$ -ból az $x = 1, y = t$ helyettesítéssel $f([1]t) = f(1)[f(t)] = 0$ következne, ami ellentmondás.

De ekkor $y = t$ mellett x helyébe a -t, illetve $[a]$ -t írva:

$$f([a]t) = f(a)[f(t)], \quad \text{illetve} \quad f([a]t) = f([a])[f(t)].$$

E kettőt kivonva egymásból: $0 = [f(t)](f(a) - f([a]))$, és ez, mivel $[f(t)]$ nem 0, azt jelenti, hogy minden a -ra $f(a) = f([a])$.

Ha bebizonyítanánk, hogy van olyan c konstans, amelyre $f(n) = c$ minden egész n -re teljesül, akkor a fenti szerint azt kapnánk, hogy f konstans függvény. Ezt mutatjuk meg.

Legyen $x = y = 0$, ekkor $f(0) = f(0) \cdot [f(0)]$, vagyis $0 = f(0)(1 - [f(0)])$. Ez kétféleképpen lehetséges.

1. eset: $f(0) = 0$. Legyen $x = 2a$ és $y = \frac{1}{2}$, ahol a tetszőleges egész szám. Ekkor

$$f\left([2a] \cdot \frac{1}{2}\right) = f(2a) \cdot \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right], \quad \text{de} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\left[\frac{1}{2}\right]\right) = f(0) = 0,$$

de $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\left[\frac{1}{2}\right]\right) = f(0) = 0$, így $f(a) = 0$, minden a egészre; mint fent láttuk ez azt jelenti, hogy f azonosan 0, tehát ebben az esetben nem találtunk új megoldást.

2. eset: $[f(0)] = 1$. Ekkor az $y = 0$ helyettesítéssel: $f([x] \cdot 0) = f(x) \cdot [f(0)]$, vagyis $f(0) = f(x)$, tehát f konstans: $f(x) = c$, és $[c] = [f(0)] = 1$.

Ezzel beláttuk, hogy f vagy az azonosan nulla függvény, vagy konstans c , ahol $[c] = 1$. Könnyen látható, hogy ezek a függvények valóban teljesítik is a feladat feltételét.

2. Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja, Γ pedig a háromszög körülírt köre. Az AI egyenes másik metszéspontja a Γ körrel legyen D . Legyen E a $\widehat{BDC}$ körív egy pontja, F pedig a BC szakasz egy pontja, amelyekre teljesül

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC.$$

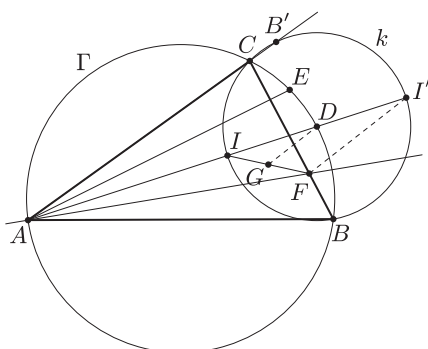
Legyen továbbá G az IF szakasz középpontja. Bizonyítsuk be, hogy a DG és EI egyenesek a Γ körön metszik egymást.

Nagy Donát megoldása. Legyen I tükörképe D -re I' , ekkor $ID = DI'$, és így $GD \parallel FI'$, hiszen GD középvonal az $II'I'$ háromszögben. Mivel AD szögfelező az ABC háromszögben, a kerületi szögek tételéből $BD = DC$. Felhasználva, hogy BI és CI szögfelező az ABC háromszögben

$$\angle BIC = 180^\circ - \angle ICB - \angle IBC = 180^\circ - \frac{\angle ACB}{2} - \frac{\angle ABC}{2}, \quad \text{továbbá}$$

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = \angle ABC + \angle ACB,$$

hiszen $ABCD$ húrnégyszög. A D középpontú $DB = DC$ sugarú körön I rajta van, hiszen $\angle BIC = 180^\circ - \frac{\angle BDC}{2}$, és BC elválasztja D -t és I -t. Az II' nyilván ennek a k körnek az átmérője.



Legyen $FAI\triangleleft = IAE\triangleleft = \varphi$ (a két szög a feladat feltétele és $IAB\triangleleft = IAC\triangleleft$ miatt egyenlő). A kerületi szögek tétele szerint GD és EI metszéspontja pontosan akkor van Γ -n, ha

$$(\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{IE})\triangleleft = \varphi = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})\triangleleft = (\overrightarrow{AI'}, \overrightarrow{AE})\triangleleft$$

(itt a megfelelő vektorok által bezárt irányított szögek egyenlőségét tekintem). Mivel $\overrightarrow{GD}$ és $\overrightarrow{FI'}$ egyirányúak, ez ekvivalens azzal, hogy

$$(\overrightarrow{AI'}, \overrightarrow{AE})\triangleleft = \varphi = (\overrightarrow{FI'}, \overrightarrow{IE})\triangleleft.$$

Tekintsük azt az A középpontú φ szögű nyújtva forgatást, ami F -et I -be viszi. Ez egy φ szöggel való nyújtva forgatás, I' képe az AE egyenesre, AI' képére esik, és a bizonyítandó ekvivalens azzal, hogy FI' képe IE , tehát hogy I' képe E . Az I' képe pontosan akkor E , ha $AF : AI = AI' : AE$, azaz $AE \cdot AF = AI \cdot AI'$.

Mivel $BAF\triangleleft = EAC\triangleleft$ és a kerületi szögek tételéből:

$$CEA\triangleleft = CBA\triangleleft, \quad ABF \sim AEC, \quad AB : AF = AE : AC, \quad AE \cdot AF = AB \cdot AC.$$

Így az állítás pontosan akkor teljesül, ha $AB \cdot AC = AI \cdot AI'$. Legyen B' a B pont tükörképe AD -re; ekkor $BAD\triangleleft = DAC\triangleleft$ miatt B' az AC egyenesen van, $BD = B'D$ miatt B' a k körön van, és $B' = C$ (akkor és) csak akkor teljesül, ha $AB = AC$, de ekkor a kerületi szögek tételéből:

$$ACD\triangleleft = ACB\triangleleft + DAB\triangleleft = ACB\triangleleft + \frac{180^\circ - 2ACB\triangleleft}{2} = 90^\circ,$$

így a k kör $B' = C$ -ben érinti az AC egyenest. Ezekből következik, hogy A -nak a k -ra vonatkozó hatványa $AI \cdot AI' = AC \cdot AB' = AC \cdot AB$, és ezzel készen vagyunk.

3. Legyen $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt, amelyre $(g(m) + n)(m + g(n))$ teljes négyzet minden $m, n \in \mathbb{N}$ -re.

Nagy János megoldása. Rögtön látható, hogy a $g(n) = n + c$ alakú függvények megfelelnek a feltételnek, ahol c egy nemnegatív egész szám, hiszen ekkor a függvény értékkészlete megfelelő és

$$(g(m) + n)(m + g(n)) = (m + n + c)^2,$$

ami valóban mindig teljes négyzet.

Bebizonyítjuk, hogy csak ezek a jó függvények.

Nézzük meg, hogy egy tetszőleges pozitív egész m -re milyen értéket vehet fel a $g(m+1) - g(m)$ kifejezés. Először igazolom, hogy nem lehet 2-től különböző prímosztója. Indirekt módon tegyük fel, hogy valamilyen $p \neq 2$ prímre $p \mid g(m+1) - g(m)$ és legyen $g(m) = pl + r$, illetve $g(m+1) = pk + r$. Mivel $p > 2$, azért kettőnél több maradékosztály van, tehát létezik biztosan olyan u pozitív egész, hogy sem $(u+l)$, sem $(u+k)$ nem osztható p -vel. Legyen $n = pu - r$.

A feladat feltételéből tudjuk, hogy $(g(m) + n)(m + g(n))$ négyzetszám, tehát $p(l+u)(m + g(n))$ négyzetszám. Tudjuk, hogy $(u+l)$ nem osztható p -vel, de p -nek páros kitevőn kell szerepelnie egy négyzetszámban, így $p \mid m + g(n)$.

Ugyanígy kapjuk m helyébe $(m+1)$ -et írva, hogy $p \mid m+1 + g(n)$, ebből $p \mid m+1 + g(n) - m - g(n) = 1$, ami ellentmondás. Így tehát azt kaptuk, hogy $g(m+1) - g(m)$ -nek semmilyen m -re nem lehet 2-től különböző prímosztója.

Most bebizonyítom, hogy $g(m+1) - g(m)$ nem lehet osztható 4-gyel. Tételizzük fel indirekt módon, hogy $4 \mid g(m+1) - g(m)$. Ekkor létezik olyan n pozitív egész szám, hogy $n + g(m)$ és $n + g(m+1)$ is kettő maradékot ad 4-gyel osztva.

Tudjuk, hogy $(g(m) + n)(m + g(n))$ négyzetszám, de $g(m) + n$ osztható 2-vel, de 4-gyel nem, amiből $2 \mid m + g(n)$. Ugyanígy kapjuk m helyébe $(m+1)$ -et írva, hogy $2 \mid m+1 + g(n)$, két szomszédos egész szám mindegyike nem lehet páros, tehát ellentmondásra jutottunk, tehát $4 \mid g(m+1) - g(m)$ nem teljesülhet.

Így arra jutottunk, hogy minden m -re $g(m+1) - g(m)$ lehetséges értékei 1, -1, 2, -2.

Ezután bebizonyítom, hogy egy adott t értéket, ha $t \neq 1$, akkor csak véges sokszor veheti föl a $g(m+1) - g(m)$ kifejezés. Tételizzük fel, hogy végtelen sok különböző m egész számra $g(m+1) - g(m) = t$. Vegyük észre, hogy

$$(g(m+1) + m)(g(m) + m + 1) = (g(m) + m + t)(g(m) + m + 1)$$

négyzetszám. Legyen $v = g(m) + m + 1$, mivel $v > m$, ezért tudjuk, hogy $v \cdot (v + t - 1)$ végtelen sok pozitív egész v -re négyzetszám.

Most két eset van.

1. eset: Ha $t - 1$ páros. Ekkor

$$\left(v + \frac{t-3}{2}\right)^2 < v \cdot (v + t - 1) < \left(v + \frac{t-1}{2}\right)^2,$$

ha v elég nagy, ami ellentmondás, hiszen ekkor $v \cdot (v + t - 1)$ nem lehet négyzetszám. A fenti egyenlőtlenség jobb oldala egyértelmű, a bal oldal azt jelenti, hogy

$$v^2 + (t - 3)v + \left(\frac{t - 3}{2}\right)^2 < v^2 + v(t - 1), \quad \left(\frac{t - 3}{2}\right)^2 < 2v,$$

ami teljesül, ha v elég nagy.

2. eset: Ha $t - 1$ páratlan. Ekkor

$$\left(v + \frac{t - 2}{2}\right)^2 < v \cdot (v + t - 1) < \left(v + \frac{t}{2}\right)^2,$$

ha v elég nagy, ami ellentmondás, hiszen ekkor $v \cdot (v + t - 1)$ nem lehet négyzetszám. A fenti egyenlőtlenség jobb oldala egyértelmű, a bal oldal azt jelenti, hogy

$$v^2 + (t - 2)v + \left(\frac{t - 2}{2}\right)^2 < v^2 + v(t - 1), \quad \left(\frac{t - 2}{2}\right)^2 < v,$$

ami teljesül, ha v elég nagy.

Azt kaptuk, hogy egy t érték csak véges sokszor szerepelhet különbséggént, ha $t \neq 1$. Így tehát a $-1, 2, -2$ értékek csak véges sokszor szerepelhetnek $g(m + 1) - g(m)$ értékeként, vagyis egy korláttól kezdve minden m -re $g(m + 1) = g(m) + 1$, azaz ha $m > N$, akkor $g(m) = m + c$ valamilyen konstans c -re.

Továbbá bebizonyítjuk, hogy akármilyen N -nél kisebb m egész számra is $g(m) = m + c$. Válasszunk egy olyan $n > N$ számot, amire $m + n + c = p$, ahol p egy prím, ekkor $(g(n) + m)(g(m) + n)$ négyzetszám, de $g(n) + m = p$, tehát $g(m) + n$ osztható p -vel, azaz $p \mid g(m) + n - p = g(m) - m - c$. Azt kaptuk, hogy $g(m) - m - c$ osztható végtelen sok elég nagy prímmel, amiből $g(m) = m + c$.

Így tehát minden pozitív egész m -re $g(m) = m + c$, ahol c egy egész szám, de nyilván nemnegatív. Ezek az egyedüli jó megoldások.

4. Legyen P egy pont az ABC háromszög belsejében. Az AP , BP és CP egyenesek másik metszéspontja az ABC háromszög Γ körülírt körével legyen rendre K , L és M . A Γ körhöz C pontban húzott érintő messe az AB egyenest az S pontban. Tegyük fel, hogy $SC = SP$. Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.

Bodor Bertalan megoldása. Legyen $BAC \sphericalangle = \alpha$, $ACB \sphericalangle = \beta$, $CBA \sphericalangle = \gamma$, $BSP \sphericalangle = \varphi$.

Az S pontnak a Γ körre vonatkozó hatványa

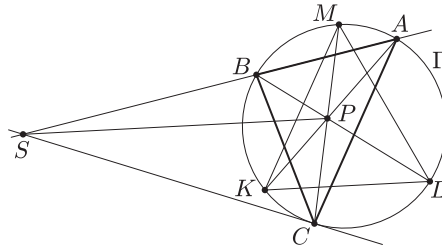
$$SA \cdot SB = SC^2 = SP^2.$$

Ebből $\frac{SB}{SP} = \frac{SP}{SA}$ adódik, ami azt jelenti, hogy az SBP és SPA háromszögek hasonlóak egymáshoz. Ebből $SAP \sphericalangle = SPB \sphericalangle$ következik. Ekkor a kerületi szögek tételéből:

$$\begin{aligned} AKL \sphericalangle &= ABL \sphericalangle = BSP \sphericalangle + SPB \sphericalangle = \varphi + SPB \sphericalangle = \varphi + SAP \sphericalangle = \\ &= \varphi + BAK \sphericalangle = \varphi + BLK \sphericalangle, \end{aligned}$$

ahonnan

$$(1) \quad AKL \sphericalangle - BLK \sphericalangle = \varphi.$$



Az érintő szárú kerületi szögek tétele miatt $BCS \sphericalangle = CAB \sphericalangle = \alpha$. Az ACS háromszögben a szögek összege $180^\circ = \alpha + ACS \sphericalangle + CSP \sphericalangle + ASP \sphericalangle = 2\alpha + \gamma + \varphi + CSP \sphericalangle$, amiből $CSP \sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha - \gamma - \varphi$. $SC = SP$ miatt az SCP háromszög egyenlő szárú, és akkor

$$SPC \sphericalangle = SCP \sphericalangle = \frac{180^\circ - CSP \sphericalangle}{2} = \alpha + \frac{\gamma + \varphi}{2}.$$

Ebből

$$BCM_{\triangleleft} = SCP_{\triangleleft} - BCS_{\triangleleft} = \frac{\gamma + \varphi}{2} \quad \text{és} \quad ACM_{\triangleleft} = \frac{\gamma - \varphi}{2}.$$

A kerületi szögek tételéből:

$$(2) \quad BLM_{\triangleleft} - AKM_{\triangleleft} = BCM_{\triangleleft} - ACM_{\triangleleft} = \frac{\gamma + \varphi}{2} - \frac{\gamma - \varphi}{2} = \varphi.$$

Az (1) és (2) egyenlőségek megfelelő oldalait egymásból kivonva

$$AKL_{\triangleleft} - BLK_{\triangleleft} - BLM_{\triangleleft} + AKM_{\triangleleft} = 0,$$

azaz

$$AKL_{\triangleleft} + AKM_{\triangleleft} = BLK_{\triangleleft} + BLM_{\triangleleft} \iff MKL_{\triangleleft} = MLK_{\triangleleft} \iff MK = ML$$

adódik, és ezt kellett bizonyítanunk.

5. A $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ dobozok mindegyikében kezdetben egy érme van. Kétféle megengedett lépés van:

1. típusú lépés: Választunk egy B_j nemüres dobozt, ahol $1 \leq j \leq 5$. Elveszünk egy érmét a B_j dobozból, és hozzáadunk két érmét a B_{j+1} dobozhoz.

2. típusú lépés: Választunk egy B_k nemüres dobozt, ahol $1 \leq k \leq 4$. Elveszünk egy érmét a B_k dobozból, és kicseréljük a B_{k+1} (esetleg üres) doboz tartalmát a B_{k+2} (esetleg üres) doboz tartalmával.

Állapítsuk meg, hogy ilyen lépések valamilyen véges sorozata segítségével elérhető-e, hogy a B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 dobozok mindegyike üres legyen, a B_6 doboz pedig pontosan $2010^{2010^{2010}}$ érmét tartalmazzon. (Definíció szerint $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Dankovics Attila megoldása. Vezessük be a következő jelöléseket.

Kapcsos zárójelbe tett rendezett számhatosok jelölik az állásokat: $\{1; 1; 1; 1; 1; 1\}$ az alapállás (az első pár üreset elhagyva: $\{0; 0; 0; 1; 1; 1\} = \{1; 1; 1\}$).

Zárójelbe tett rendezett számpárok jelölik a lépéseket: például $(1; 2)$ azt jelenti, hogy az első dobozból egy 2. típusú lépést hajtottunk végre. Végül jelölje például $n \cdot (k; 1)$ azt, hogy a $(k; 1)$ lépést n -szer végezzük el.

Legyen $v = 2010^{2010^{2010}}$.

1. Lemma. Az $\{a; b; c; x; 0; 0\}$ állásból elérhető az $\{a; b; c; 0; 2^x; 0\}$ állás.

Bizonyítás. Teljes indukció x szerint: $x = 1$ -re $(4; 1)$ lépés után elértük az állást.

Indukciós lépés: $\{a; b; c; 0; 2^{x-1}; 0\}$ az indukciós feltevés szerint elérhető. Ez után 2^{x-1} -szer az $(5; 1)$, majd a $(4; 2)$ lépéseket végrehajtva elértük a kívánt állást.

Hajtsuk végre egymás után a következő lépéseket:

$\{1; 1; 1; 1; 1; 1\}$ -re $(1; 1); (2; 1); (3; 1); (4; 1); (5; 1)$, az így kapott
 $\{0; 2; 2; 2; 2; 3\}$ -re $2 \cdot (5; 1); (4; 2); 7 \cdot (5; 1); (3; 2)$, majd
 $\{0; 2; 1; 14; 0; 0\}$ -re az 1. Lemma szerint létező lépéssorozattal kapott
 $\{0; 2; 1; 0; 2^{14}; 0\}$ -re $(3; 2); (2; 2); (2; 1); 2 \cdot (3; 1)$ adja

$\{0; 0; 2^{14}; 4; 0; 0\}$ -t, amire az 1. Lemma eljárását és $(3; 2)$ -t felváltva ismételve 2^{14} -szer a $\left\{0; 0; 0; \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}}_{2^{14}+2 \text{ db}}; 0; 0\right\}$

álláshoz jutunk.

Legyen a B_4 dobozban lévő érmék aktuális száma mindig h . Megjegyzendő, hogy h paritása tetszőlegesen beállítható (szükség esetén a $(4; 2)$ lépés alkalmazásával); ezt később fogom kihasználni.

Az előbbi helyzetből a $3 \cdot ((4; 1); 2 \cdot (5; 1))$ átalakítás után a $\{h; 0; 12\}$ állást kapjuk. Jelölje a B_6 -ban lévő érmék számát mindig y (mely jelenleg 3-mal osztható, lévén 12). Legyen végül a B_5 -ben lévő érmék száma x .

Ekkor a $(4; 2); x \cdot (5; 1)$ lépéssorozat y értékét duplázza és h értékét 1-gyel csökkenti (ezután h még pozitív marad, mert $h > v$; továbbá y 3-mal osztható marad; továbbá h paritása tetszőleges marad). Duplázzuk y -t míg $2y \leq v < 4y$ teljesül. Legyen az ekkor aktuális y értéke c . A $(4; 2)$ lépés után ismételjük az $(5; 1)$ lépést addig, amíg $x + 2y = v$ nem teljesül (előbb-utóbb teljesülni fog, mert $x + 2y$ minden lépésben 3-mal nő, így c és $4c$ között minden 3-mal osztható értéket felvesz, és v is ilyen). Ezt követően a $(4; 2); x \cdot (5; 1)$ lépéssorozat után a $\{h; 0; v\}$ állást kapjuk. Ez az állás tetszőleges paritású h -val elérhető, legyen h páros. Ekkor $h \cdot (4; 2)$ után az állás: $\{0; 0; 0; 0; 0; v\}$, ami megegyezik az elérendő állással.

Tehát a kérdéses állás elérhető.

6. Legyen $a_1, a_2, a_3, \dots$ pozitív valós számok egy sorozata. Tegyük fel, hogy van egy olyan s pozitív egész, amellyel

$$a_n = \max \{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

teljesül minden $n > s$ egészre. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan ℓ és N pozitív egészek, amikre $\ell \leq s$, és $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ minden $n \geq N$ -re.

Éles András megoldása. Legyen $m \geq 2$, és $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq s$ tetszőleges m darab pozitív egész, melyek összege n . Ha ezek teljesítenek egy *plusz feltételt*, akkor az

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_m}$$

összeget n -re képzett összegnek nevezzük. A plusz feltétel az, hogy az i_j számok közül valamelyik kettő összege nagyobb, mint s (például $i_1 + i_2 > s$, viszont $i_1 + i_1 > s$ még nem elégséges feltétel). Ezt a definíciót és a plusz feltétel eredetét a most következő kulcsfontosságú lemma és annak bizonyítása fogja megmagyarázni.

Lemma. Az n -re képzett összegek maximuma a_n minden $n > s$ esetén.

Ezt n -re indukcióval igazoljuk. Ha $k > s$, akkor $n > k$ és az indukciós feltevés értelmében a_k helyébe beírhatunk egy k -ra képzett összeget. Ugyanígy járunk el a_{n-k} -val. Az indexek összege n lesz, a plusz feltétel pedig teljesül, hiszen a_k vagy a_{n-k} felírásából származik két megfelelő indexű tag, ha $k > s$ vagy $n - k > s$ (különben pedig ők maguk a két tag). Tehát a_n felírható egy n -re képzett összegként.

Már csak azt kell igazolni, hogy a_n felső becslés minden n -re képzett összegre. Feltehető a plusz feltétel miatt, hogy $i_1 + i_2 > s$. Alkalmazva a sorozat képzési szabályát mindig a legelső tagra (amelynek indexe mindenütt nagyobb, mint s):

$$\begin{aligned} a_n &= a_{i_1+i_2+\dots+i_k} \geq a_{i_1+i_2+\dots+i_{k-1}} + a_k \geq a_{i_1+\dots+i_{k-2}} + a_{k-1} + a_k \geq \dots \geq \\ &\geq a_{i_1+i_2} + a_{i_3} + \dots + a_k \geq a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}. \end{aligned}$$

Ezzel a lemmát igazoltuk.

Legyen l olyan pozitív egész, melyre $1 \leq l \leq s$ és ezen belül $\frac{a_l}{l}$ maximális! A megoldás azon észrevételen alapszik, hogy elég nagy n -re felírva a_n -et egy n -re képzett összegként, az a_l -től különböző tagok száma egy bizonyos határ alá szorítható. Ha ugyanis $t \neq l$ és van $l + 2$ darab a_t az összegben, akkor l darab a_t lecserélhető t darab a_l -re, az összeg ekkor nem csökken, hiszen

$$l \cdot a_t = lt \cdot \frac{a_t}{t} \leq lt \cdot \frac{a_l}{l} = t \cdot a_l.$$

Így egy legalább akkora, tehát ismét a_n -nel egyenlő n -re képzett összeget kaptunk. (azért a $+2$ darab a_t , hogy az eltűnő indexből maradjon legalább kettő, így ne sérüljön a *plusz feltétel*). Ezt az eljárást addig végezzük, míg lehet, ily módon a_n már olyan n -re képzett összegként áll majd elő, ahol minden t , $1 \leq t \leq s$, $t \neq l$ esetén a_t az összegben legfeljebb $(l + 1)$ -szer szerepel.

Következő választásunk

$$N = (1 + 2 + \dots + s)(l + 1) + 2l + 1,$$

ugyanis $n \geq N$ esetén a_n fenti felírásában legalább 3 darab a_l lesz jelen, hiszen a többi index összege maximum $N - 2l - 1$. Az egyik a_l -t törölve marad legalább kettő (így a plusz feltétel megint nem sérül), az indexek összege $n - l$ lesz, tehát egy $(n - l)$ -re képzett összeg, S_{n-l} marad hátra. De akkor, a lemma és a sorozat képzése alapján

$$a_n = a_l + S_{n-l} \leq a_l + a_{n-l} \leq a_n.$$

Ez végig egyenlőség. Tehát l -nek és N -nek a fenti választásaival $a_n = a_l + a_{n-l}$ minden $n \geq N$ esetén. (A gondolatmenet finomításával N javítható.)