I. rész

1. *Jenci rollert szeretne vásárolni, ezért elindul a boltba valamennyi pénzzel, mind három fabatkás. A boltban csak egyfajta roller van, az ára 19 fabatka. A boltosnak azonban csak öt fabatkásai vannak. Hogyan tudják a legkevesebb pénzdarab fölhasználásával lebonyolítani az üzletet?* (*11 pont*)

Megoldás. A háromfabatkások száma legyen x, az ötfabatkásoké pedig y. Ekkor $3x-5y=19$. Ebből x-et kifejezve kapjuk, hogy
$$x=\frac{5y+19}{3}=y+6+\frac{2y+1}{3}.$$
Mivel x és y egész számok, ezért $\frac{2y+1}{3}$ is egész, vagyis $3 \mid 2y+1$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $y=3k+1$.

Ha $y=3k+1$, akkor
$$x=y+6+\frac{2y+1}{3}=3k+1+6+\frac{2(3k+1)+1}{3}=3k+7+2k+1=5k+8.$$
A legkisebb megoldást akkor kapjuk, ha $k=0$. Ekkor $x=8$, $y=1$, vagyis Jenci 8 darab háromfabatkással fizet és 1 darab ötfabatkást kap visszajárónak.

2. *Három szomszédos páratlan négyzetszám összege egy csupa azonos számjegyből álló négyjegyű szám. Határozzuk meg a négyjegyű számot.* (*12 pont*)

Megoldás. Felírhatjuk a következő egyenletet:
$$(2a-1)^2+(2a+1)^2+(2a+3)^2=\overline{bbbb},$$
ahol $a \in \mathbb{N}^+$, $b \neq 0$ pedig számjegy. A jobb oldal alakítható:
$$\overline{bbbb}=1111 \cdot b=11 \cdot 101 \cdot b.$$
A bal oldalon a zárójeleket felbontva és a tagokat összevonva kapjuk, hogy:
$$12a^2+12a+11=11 \cdot 101 \cdot b.$$
Mivel a jobb oldal osztható 11-gyel, ezért a bal oldal is: $11 \mid 12a^2+12a+11$, amiből következik, hogy $11 \mid 12a^2+12a$. Mivel $(11,12)=1$, ezért innen $11 \mid a^2+a$ következik. Mivel $a^2+a=a(a+1)$, ezért vagy a, vagy $a+1$ a 11 többszöröse. Azt is tudjuk, hogy $f(a):=12a^2+12a+11$ értéke legfeljebb 9999, és hogy pozitív egész a esetén $f(a)$ szigorúan monoton nő.

Vizsgáljuk meg a szóba jövő eseteket. Ha $a=10$, akkor $f(a)=1331$. ha $a=11$, akkor $f(a)$ értéke 1594. Ha $a=21$, akkor $f(a)$ értéke 5555, illetve ha $a=22$, akkor $f(a)=6083$. Ha $a=32$, akkor $f(a)$ már ötjegyű, tehát más megoldás nem lehetséges. Tehát a négyjegyű szám az 5555.

3. *Az $ABCD$ négyszög AB és CD oldala merőleges egymásra. Az AC szakasz felezőpontja E, a BD szakaszé F. Bizonyítsuk be, hogy $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4\overline{EF}^2$.* (*14 pont*)

Megoldás. Legyen a DC és az AB egyenes metszéspontja O, és jelölje az O pontból az egyes pontokba mutató vektorokat a megfelelő kisbetű. Tudjuk, hogy $\mathbf{e}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$ és $\mathbf{f}=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}$. Mivel $\overrightarrow{EF}=\mathbf{f}-\mathbf{e}$, így
$$4\overrightarrow{EF}^2=4(\mathbf{f}-\mathbf{e})^2=4\left(\frac{\mathbf{b}+\mathbf{d}}{2}-\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}\right)^2=(\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{c})^2.$$
Mivel $\mathbf{bd}$, $\mathbf{bc}$, $\mathbf{ad}$ és $\mathbf{ac}$ a merőlegesség miatt 0, így
$$(\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=(\mathbf{b}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{d}-\mathbf{c})^2+0=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2.$$
Azt kaptuk, hogy $4\overrightarrow{EF}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2$, így a bizonyítást befejeztük.

4. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:*
$$\begin{aligned} x-y&=7,\\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}&=7. \end{aligned}$$
(*14 pont*)

Megoldás. Használjuk fel, hogy $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, és legyen $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$. Ekkor $7=a^2+ab+b^2$ és ebből

$$7=a^3-b^3=(a-b)\big(a^2+ab+b^2\big)=(a-b)\cdot 7,$$

vagyis $a-b=1$ és így $a=b+1$ következik. Ekkor $a^3=(b+1)^3=b^3+1+3b(b+1)$. Az első egyenletből $a^3=7+b^3$. A két egyenlet bal oldala megegyezik, így a jobb oldaluk is egyenlő:

$$b^3+1+3b(b+1)=7+b^3,$$

amiből

$$3b^2+3b-6=0, \quad b^2+b-2=(b-1)(b+2)=0.$$

Ha $b=\sqrt[3]{y}=1$, akkor $y=1^3=1$, és $x=7+1=8$, ami kielégíti az egyenletrendszert.

Ha $b=\sqrt[3]{y}=-2$, akkor $y=(-2)^3=-8$ és $x=7-8=-1$, ami szintén jó megoldás.

II. rész

5. *Adott egy* 14 cm *sugarú körlap, melyből kivágunk egy körcikket, amely egy kúp palástja. Mekkora az így kapható legnagyobb térfogatú kúp, és milyen nagy ekkor a körcikk középponti szöge?* (*16 pont*)

Megoldás. Legyen a körcikk középponti szöge α (rad) $(0<\alpha<2\pi)$, a hozzá tartozó ív hossza pedig k_α. Ekkor $\dfrac{k_\alpha}{2\cdot 14\cdot\pi}=\dfrac{\alpha}{2\pi}$, amiből $k_\alpha=14\alpha$.

A kúp magassága legyen m, alapkörének sugara R. Alkotója tudjuk, hogy 14. A kúp alaplapjának kerülete $R\cdot 2\pi=k_\alpha$, amiből

$$R=\frac{k_\alpha}{2\pi}=\frac{14\alpha}{2\pi}=\frac{7\alpha}{\pi}.$$

Felírva a Pitagorasz tételt a kúp magassága, alkotója és alapkörének sugara által alkotott derékszögű háromszögre: $R^2+m^2=14^2=196$, amiből

$$m=\sqrt{196-R^2}=\sqrt{196-\frac{49\alpha^2}{\pi^2}}.$$

A kúp térfogata:

$$V(\alpha)=\frac{R^2\pi m}{3}=\frac{\frac{49\alpha^2}{\pi^2}\cdot\pi\cdot\sqrt{196-\frac{49\alpha^2}{\pi^2}}}{3}=\frac{7^3}{3\pi}\alpha^2\sqrt{4-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}.$$

$V(\alpha)$ egy nyílt intervallumon értelmezett függvény, ezért ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0:

$$0=V'(\alpha)=\frac{7^3}{3\pi}\left[2\alpha\sqrt{4-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}+\alpha^2\cdot\frac{-\frac{2\alpha}{\pi^2}}{2\sqrt{4-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}}\right].$$

Mivel $\alpha\neq 0$, ezért osztva $\dfrac{7^3}{3\pi}\cdot\alpha$-val, illetve a gyökös kifejezéssel szorozva a következőt kapjuk:

$$0=2\left(4-\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right)-\frac{\alpha^2}{\pi^2}.$$
$$0=8\pi^2-2\alpha^2-\alpha^2=8\pi^2-3\alpha^2.$$

Ebből (mivel $\alpha>0$)

$$\alpha=\sqrt{\frac{8}{3}}\pi.$$

Mivel a deriváltfüggvényt pozitív kifejezésekkel osztva és szorozva kaptuk a $8\pi^2-3\alpha^2$ másodfokú függvényt, így azok előjele adott α esetén megegyezik. A másodfokú függvény menetét figyelembe véve a deriváltfüggvény $\alpha=\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ helyen pozitívból negatívba vált, így az az eredeti függvény maximumhelye. A térfogat ekkor

$$V=\frac{7^3}{3\pi}\frac{8}{3}\pi\sqrt{4-\frac{\frac{8}{3}\pi^2}{\pi^2}}=\frac{7^3\cdot 8}{9}\pi\sqrt{\frac{4}{3}}\approx 1106{,}0145.$$

6. *A kosárlabda mérkőzéseken a büntetődobások szabálya a következő: a büntetőt végző játékos kétszer vagy háromszor dobhat, minden kosárral* 1 *pontot szerezhet, összesen legföljebb* 2*-t. Egy kosaras* $p>0$ *valószínűséggel dob be egy büntetőt.*

a) *Milyen* p *valószínűség esetén szerez a játékos ugyanakkora eséllyel* 1*, illetve* 2 *pontot?*

b) *Írjuk föl tetszőleges* p *valószínűség mellett a büntetődobásokkal szerzett pontok várható értékét.* (*16 pont*)

Megoldás. Jelölje az X változó azt, hogy a játékos hány pontot szerez.

a) 1 pontot úgy kaphat, ha a három dobásból kettőt kihagy, egyet bedob. Erre nyilván három lehetősége van, tehát $P(X=1)=3(1-p)^2p$. Két pontot vagy úgy kaphat, hogy az első vagy a második dobást kihagyja, a többit bedobja, vagy pedig az első kettőt bedobja (és ekkor többet nem dob). Tehát $P(X=2)=2p^2(1-p)+p^2=p^2(3-2p)$. Ha a kettő egyenlő, akkor:

$$3(1-p)^2p=p^2(3-2p).$$

Mivel $p\neq 0$, ezért oszthatunk vele, majd felbontjuk a zárójeleket:

$$\begin{gathered}3\big(1-2p+p^2\big)=p(3-2p),\\ 0=5p^2-9p+3,\\ p=\frac{9\pm\sqrt{81-60}}{10}=\frac{9\pm\sqrt{21}}{10}.\end{gathered}$$

Ebből a nagyobbik gyök 1-nél nagyobb, tehát az egyetlen megoldás a $p=\dfrac{9-\sqrt{21}}{10}\approx 0{,}4417$.

b) Felhasználva az *a*) pontban kapott értékeket:

$$\begin{aligned}E(X)&=2\cdot p^2(3-2p)+1\cdot 3(1-p)^2p+0\cdot P(X=0)=\\ &=6p^2-4p^3+3p-6p^2+3p^3=-p^3+3p.\end{aligned}$$

7. *A lakásunk fűtését biztosító gázkazán elavult, sokszor javításra szorul, melynek költsége évente* 15 000 Ft. *Egy új kazán, amely hosszú ideig nem szorul javításra,* 400 000 Ft-ért *kapható. Érdemes volna új készüléket vásárolni. Erre két lehetőségünk van. Az egyik, hogy megtartjuk a régi készüléket, takarékoskodunk, és csak akkor veszünk újat a jelenlegi áron (megfigyelésünk szerint minden évben kapható hasonló készülék ilyen áron), amikor összejön rá a pénz. A banknál havi* 10 000 Ft *befizetésével egy külön takarékszámlán gyűjtjük a pénzt, amelyre éves* 2% *kamatot kapunk, amit havonta jóváírnak. Ebben az esetben azonnal megvásároljuk a készüléket, amint a pénz rendelkezésre áll, de sajnos minden megkezdett évben ki kell fizetnünk a javítás költségét.*

A másik lehetőség, hogy folyószámlahitelből megvesszük a készüléket. Ennek éves kamata 20,41%. *A családi költségvetésből a kölcsön törlesztésére évi* 135 000 Ft-ot *tudunk szánni.*

Melyik a számunkra pénzügyileg kedvezőbb eset? (*16 pont*)

Megoldás. Ha félretesszük a pénzt, akkor n hónap után akkor tudjuk megvásárolni a készüléket, amikor a $400\,000\le\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\cdot 10\,000$ egyenlőtlenség teljesül, ahol $q=\sqrt[12]{1{,}02}$. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát 10 000-rel osztva, majd rendezve ($q-1>0$, tehát nem fordul meg a relációsjel):

$$\begin{gathered}40(q-1)\le q^{n+1}-1,\\ 40q-39\le q^{n+1}.\end{gathered}$$

Mivel $q>1$, ezért az $x\mapsto\log_q x$ függvény szigorúan monoton növekedő. Azaz

$$\begin{gathered}\log_q(40q-39)\le n+1,\\ \frac{\ln(40q-39)}{\ln q}-1\le n,\\ 37{,}766\le n,\end{gathered}$$

vagyis 38 havi befizetésre van szükség, ami összesen 380 000 Ft, a régi készülék karbantartási költségével együtt legfeljebb 440 000 Ft.

Ha kölcsönt veszünk fel, akkor évente 135 000 Ft-ot fizetünk be. Ha a 400 000 Ft-ot k év alatt kifizetjük, akkor a következő egyenlőtlenség teljesül:

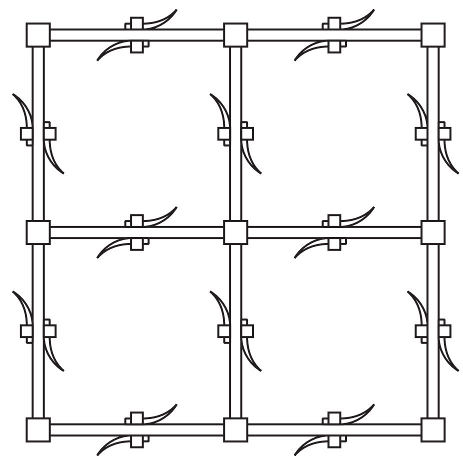
$$400\,000\cdot 1{,}2041^k\le 135\,000\cdot\frac{1{,}2041^k-1}{0,2041}.$$

Osztva 1000-rel és rendezve:

$$\begin{gathered}400\cdot 1{,}2041^k\le 661{,}4405\cdot\big(1{,}2041^k-1\big),\\ 661{,}4405\le 261{,}4405\cdot 1{,}2041^k,\\ 2{,}529985\le 1{,}2041^k,\\ \frac{\ln 2{,}529985}{\ln 1{,}2041}\le k,\\ 4{,}9976\le k.\end{gathered}$$

Tehát 5 évig kell fizetni a kölcsönt, ami összesen $5\cdot 135\,000=675\,000$ Ft, ami jóval több a 440 000-nél.

8. *A mellékelt* ábra *egy vas kerítés négy ismétlődő elemét mutatja oldalnézetből. A hosszú elemek mérete* 30 cm *és* 4 cm, *az őket egymáshoz kapcsoló négyzetek oldala* 8 cm. *Az íves elemeket kapcsoló négyzetek oldala* 4 cm, *a mellettük megtalálható négyzet oldala* 2 cm. *Az íves elemek merőlegesen csatlakoznak a* 4 cm *oldalú négyzethez és két körív határolja őket, melyek középpontja a négyzet csatlakozó oldalélének meghosszabbításán van. A kisebb kör sugara* 12 cm, *a hozzá tartozó ív a* 4 cm-es *négyzet csúcsánál indul és* 60°*-os középponti szögű. A nagyobb sugarú körív a négyzet oldalának középpontjánál kezdődik. A kerítés teljes vasszerkezete* 2 cm *vastagságú, függőlegesen négy, vízszintesen huszonnégy ismétlődő elemből áll.*

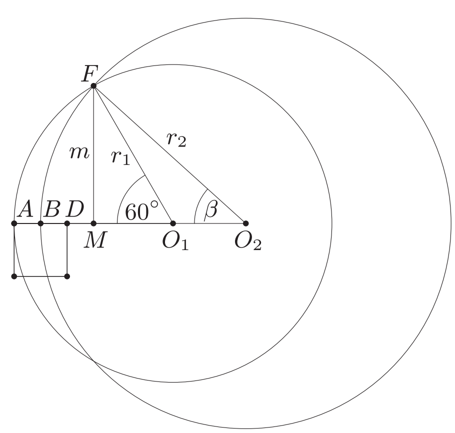


a) Számítsuk ki az íves elemet létrehozó nagyobb sugarú kör sugarát és a hozzá tartozó ív középponti szögét.
b) Számítsuk ki az íves elemek oldalnézetből látható területét.
c) Hány kg *vasra volt szükség a kerítéshez? (A vas sűrűsége* $7{,}86\ \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.) (*16 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Tudjuk, hogy $r_1 = 12$, $AB = BD = 2$. Mivel $FO_1M = 60°$, ezért $m = 6\sqrt{3}$ és $MO_1 = 6$. Ez utóbbiból

$$DM = AO_1 - AD - MO_1 = r_1 - 4 - 6 = 2$$

következik.



a) Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} r_2 = BO_2 &= BD + DM + MO_1 + O_1O_2 = \\ &= 2 + 2 + 6 + O_1O_2, \end{aligned}$$

amiből $O_1O_2 = r_2 - 10$. Írjuk fel a Pitagorasz-tételt az FMO_2 háromszögre:

$$\begin{gathered} \left(6\sqrt{3}\right)^2 + \left(6 + O_1O_2\right)^2 = r_2^2, \\ 36 \cdot 3 + \left(r_2 - 4\right)^2 = r_2^2, \\ 124 = 8r_2, \qquad r_2 = 15{,}5 \text{ cm}. \end{gathered}$$

Ebből pedig (felhasználva, hogy β hegyesszög)

$$\beta = \arcsin \frac{m}{r_2} = \arcsin \frac{6\sqrt{3}}{15{,}5} \approx 42{,}10^\circ.$$

b) Az O_1 középpontú, r_1 sugarú, 60°-os középponti szögű körcikk területét t_1-gyel, az O_2 középpontú, r_2 sugarú és β középponti szögű körcikk területét pedig t_2 vel jelölve egy íves elem területe:

$$\begin{aligned} T &= [t_1 - t_{FMO_1\triangle}] - [t_2 - t_{FMO_2\triangle}] = \\ &= \left[\frac{60}{360} \cdot 12^2\pi - \frac{6\sqrt{3}\cdot 6}{2}\right] - \left[\frac{42{,}10}{360} \cdot 15{,}5^2\pi - \frac{6\sqrt{3}(15{,}5-4)}{2}\right] \approx 15{,}71\ \mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$

c) Egy hosszú elem és a hozzá csatlakozó két íves elem és négy négyzet területe együtt $2\cdot(15{,}71+2\cdot2+4\cdot4)+30\cdot4 = 191{,}42\ \mathrm{cm}^2$. Mivel ebből összesen $24\cdot(4+1)+4\cdot(24+1) = 220$ darab van, ez együtt $220\cdot 191{,}42 = 42\,112{,}4\ \mathrm{cm}^2$.

A hosszú elemeket összekapcsoló négyzetek összes területe

$$(4+1)(24+1)\cdot 8\cdot 8 = 8\,000\ \mathrm{cm}^2,$$

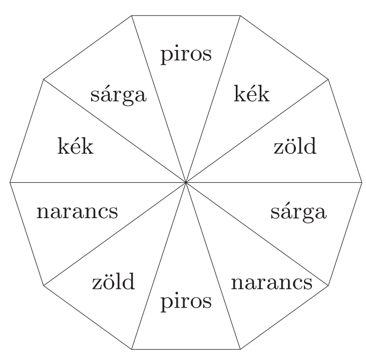
a kerítés teljes területe oldalnézetből $42\,112{,}4 + 8\,000 = 50\,112{,}4\ \mathrm{cm}^2$.

A kerítés térfogata tehát $2\cdot 50\,112{,}4 = 100\,224{,}8\ \mathrm{cm}^3$.

Mivel a vas sűrűsége $7{,}86\ \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, így a kerítés vasszerkezetének tömege

$$100\,224{,}8\cdot 7{,}86 = 787\,766{,}928\ \mathrm{g} \approx 787{,}77\ \mathrm{kg}.$$

9. *Egy társasjáték szabályos tízszög alakú tábláját a következő módon szeretnénk kiszínezni: öt szín (piros, kék, zöld, sárga, narancs) mindegyikét kétszer felhasználva a tíz cikket úgy színezzük ki, hogy mindegyik színpár pontosan egy esetben legyen egymással szomszédos cikk színe. Az* ábrán *egy jó színezés látható. (A tábla díszített, ezért az elforgatásokkal és tükrözésekkel kapott színezések különböznek egymástól.)*



a) *Ha öt szomszédos cikket már kiszíneztünk öt különböző színnel, akkor a többit – szintén minden színt egyszer felhasználva – hányféleképpen színezhetjük ki?*

b) *Adjunk példát olyan színezésre, ahol nincs egymás mellett öt különböző színű cikk.* (*16 pont*)

Megoldás. A színeket az egyszerűség kedvéért jelöljük az 1-től 5-ig terjedő egész számokkal. Egy cikket kitüntetve, majd az óramutató járását követve írjuk le a színezést. Az *ábrán* látható színezés pl. (1234513524).

a) A színezés a következő: (12345xxxxx). Az 1-es mellé 3, 4 vagy 5 kerülhet.

I. eset: a 3-as kerül oda, ekkor a színezés így alakul: (12345xxxx3). A 3 mellett csak 5 állhat, az 5 mellett pedig 1 vagy 2. A másik 5 mellett is 1 vagy 2 állhat, az utolsó szabad helyen pedig 4. Vagyis két ilyen színezés van: (1234524153) vagy (1234514253).

II. eset: a 4-es kerül oda. A 4 mellé csak 2 kerülhet, a 2 mellé csak 5. Az 5 mellé 1 vagy 3. A másik 4 mellé 5 kerül, a maradék helyre pedig 3 vagy 1. A két lehetőség, amit kaptunk: (1234531524) vagy (1234513524).

III. eset: az 5 kerül oda, mellé a 2 vagy a 3 mehet. Ha 2, akkor ezt az esetet kapjuk: (1234524135). Ha 3, akkor ezt: (1234531425).

Ez összesen 6 lehetőség.

b) Az *a*) részben használt jelöléssel egy megfelelő színezés: (1231534524).