I. rész

1. Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényt a lehető legbővebb számhalmazon:

$$f\colon x \longmapsto \left(\frac{2^x+5}{2^{x+1}-10} - \frac{2^x-5}{2^{x+1}+10} - \frac{50}{25-4^x}\right) : \frac{5\cdot 2^x}{2^x-5}.$$

(*11 pont*)

2. Mennyi a valószínűsége, hogy a háromjegyű pozitív egészek közül találomra olyat választunk, mely az 5, a 7, illetve a 11 egyikével sem osztható? (*12 pont*)

3. Matematikus barátunk statisztikát csinál a kiránduláson készített 500 fényképéről. Azt találja, hogy a méretük átlaga 2,84 MB, s a legnagyobb méretű képe 3,65 MB-os.

a) Mennyi a méretük szórásának legkisebb értéke?

b) Legfeljebb mekkora lehet a méretük szórása, ha a terjedelem 1,62 MB? (*14 pont*)

4. A fixhajtású kerékpárnál fontos a lánc feszessége. Az első lánckerék sugara 104 mm, fogszáma 52, a hátsó lánckerék adatai pedig 32 mm és 16 fog. (A lánckerék sugarát úgy mértük, hogy az megegyezik egy, a lánckerékre illeszkedő láncszem középpontjának a lánckerék középpontjától mért távolságával.) Milyen hosszú láncra van szükségünk, ha a két lánckerék középpontjának távolsága 450 mm? Hány láncszemet tartalmaz ez a lánc? (*14 pont*)

II. rész

5. Milyen $m \in \mathbb{R}$ paraméter esetén lesz hegyesszögű α megoldása a következő egyenletnek?

$$\cos^2\alpha - (18-2m)\cos\alpha + m^2 + 3m + 3 = 0$$

(*16 pont*)

6. Ábrázoljuk a következő ponthalmazt a koordinátasíkon:

$$H := \left\{ P(x;y) \;\middle|\; \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1} \le 0 \;\wedge\; |y| \le 1 \right\}$$

Mekkora a ponthalmaz területe? (*16 pont*)

7. Az $ABCD$ négyzet alapú egyenes gúla AE odalalélének P pontjára teljesül, hogy $AP : PE = 1 : 2$, valamint a CE oldalélének R pontjára igaz, hogy $CR : RE = 1 : 2$.

a) Milyen arányban osztja a B csúcson, valamint a P és R pontokon átmenő sík a DE élt?

b) Hány százaléka a keletkező síkmetszet területe az alap négyzetlap területének, ha a gúla magassága az alaplap átlójának másfélszerese? (*16 pont*)

8. Készítsünk „mérőhengert”, mely az $f(x) = x^{10}$, ahol $x \in [-1;1]$ függvény y tengely körüli megforgatásával jön létre. A koordinátarendszer egységeit dm-ben mérjük. Készítsünk deciliterenként beosztást az oldalán. (Milyen magasságoknál lesznek az osztásvonalak?) (*16 pont*)

9. Egy „piramisjáték” elindítója a második hétre már 4 embert sikeresen beszervezett, így öten lettek. (Az első hét a tervezés ideje volt.) A szervezés olyan jól sikerült, hogy a harmadik héttől kezdve minden héten a következő sorozat szerint alakult az összes résztvevő száma: $a_n = 3a_{n-1} - 8$.

a) Hányan vettek részt az ötödik héten a játékban?

b) Mutassuk meg, hogy az összes résztvevők száma monoton növekvő sorozatot alkot.

c) Írjuk fel explicit alakban a sorozatot.

d) Igazoljuk, hogy a sorozat utolsó számjegyei $n = 2$-től kezdve periodikus sorozatot alkotnak. (*16 pont*)