

I. rész

1. Milyen α valós paraméter esetén lesz a következő egyenletnek egy megoldása?

$$\frac{x^2 \cos \alpha + x + \frac{1}{2} \sin \alpha}{x^2 - \frac{1}{2}} = 0.$$

(11 pont)

Megoldás. A nevezőben nem állhat nulla, tehát $x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Egy tört akkor lehet nulla, ha a számlálója nulla, vagyis

$$x^2 \cos \alpha + x + \frac{1}{2} \sin \alpha = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek akkor lesz pontosan egy megoldása, ha

a) Nem másodfokú az egyenlet, vagyis a másodfokú tag együtthatója nulla. Ekkor $\cos \alpha = 0$, azaz

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\text{ahol } k \in \mathbb{Z}).$$

Ekkor

$$x + \frac{1}{2} \sin \alpha = 0,$$

melyre

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \quad \text{esetén} & x_1 = -\frac{1}{2}, \\ \alpha_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi & \quad \text{esetén} & x_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Másodfokú az egyenlet ($\cos \alpha \neq 0$), s ekkor az egyenlet diszkriminánsa nulla. Ebből

$$1 - 4 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha = 0,$$

vagyis $\sin 2\alpha = 1$ adódik. Ennek gyökei $\alpha = \frac{\pi}{4} + l\pi$, ahol $l \in \mathbb{Z}$. A paraméter ezen értékei azonban nem felelnek meg a feltételeknek, hiszen $\alpha = \frac{\pi}{4}$ esetén $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ esetén $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ adódik.

Tehát az egyenletnek csak $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ esetén lesz egy valós gyöke.

2. Óvodás korú kisöcsénk a játék rulett-zsetonokat használja toronyépítésre. Az első korongoszlop mellé magasabbat állít, majd a következőket ugyanannyival növeli, mint a korábbiakat. Így egy lépcsős toronysorozat hoz létre mackójának.

a) Milyen sorozatot alkotnak a tornyok magasságai?

b) Az első toronytól kezdve csoportosítsuk a tornyokat hármassával. Igazoljuk, hogy a hármass csoportokban szereplő tornyok magasságainak összege számtani sorozatot alkot.

c) A sorba rendezett tornyok elejéről kisöcsénk elvett n darab tornyot, majd megszámlolta velünk, hogy hány zsetonja van összesen. Ezután elvett még n db tornyot, s ismét megkérdezte, hogy az előzővel együtt most hány zsetonja is van. Ebből a két adatból meg tudnánk-e mondani, hogy még n tornyot elvéve, hány zsetonunk is lesz az előzőkkel együtt? (12 pont)

Megoldás. a) Mivel a szomszédos tornyok magasságai ugyanannyival növekednek, ezért számtani sorozatot alkotnak. (Ez a számtani sorozat definíciója.)

b) Jelölje az a)-beli sorozat általános tagját a_n , differenciáját pedig d . Ekkor az új sorozat egy általános elemét így írhatjuk fel:

$$b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 3 \cdot a_{3n} - 3d = 3a_1 - 6d + n \cdot 9d.$$

Ebből kiolvasható a számtani sorozat definíciója, a $9d$ -s állandó növekedés. Vagy igazolhatjuk az állítást a

$$2b_n = b_{n-1} + b_{n+1}, \quad 2(3 \cdot a_{3n} - 3d) = (3a_{3n} - 12d) + (3a_{3n} + 6d)$$

összefüggéssel is.

c) Legyen

$$s_n = b = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = a_1n + \frac{(n-1)nd}{2},$$

$$s_{2n} = c = \frac{2a_1 + (2n-1)d}{2} \cdot 2n = 2a_1n + \frac{(2n-1)2nd}{2},$$

$$s_{3n} = \frac{2a_1 + (3n-1)d}{2} \cdot 3n = \frac{6a_1n + (3n-1)3nd}{2} = 3a_1n + \frac{9n \cdot nd}{2} - \frac{3nd}{2}.$$

Ekkor

$$c - b = a_1n + \frac{3n \cdot nd}{2} - \frac{nd}{2},$$

amiről látható, hogy éppen az s_{3n} harmada. Tehát $s_{3n} = 3(c - b)$.

3. Az A halmaz elemei olyan 100-nál kisebb pozitív egészek, melyekre $\sin(a \cdot 10^\circ) = 0,5$. A B halmaz elemei a 100-nál kisebb hattal osztható természetes számok.

a) $|A| = ?$ $|B| = ?$

b) Definiáljuk a C halmazt a következőképpen: $C := \{1; 2; 3; 6; A\}$, ahol az A halmaz a C eleme. $|C \setminus B| = ?$

c) Hány páros elemű részhalmaza van C -nek? (14 pont)

Megoldás. a) A $\sin(a \cdot 10^\circ) = 0,5$ egyenlet megoldásai

$$a \cdot 10^\circ = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad \text{illetve} \quad a \cdot 10^\circ = 150^\circ + l \cdot 360^\circ,$$

melyekből a 100-nál kisebb a értékek a 3, 39, 75, illetve 15, 51, 87. Tehát $|A| = 6$.

A B halmaz elemei: 0, 6, 12, ..., 96. Tehát $|B| = 17$.

b) $C \setminus B = \{1; 2; 3; A\}$, tehát $|C \setminus B| = 4$.

c) Az öt elemű C halmaznak a páros elemű részhalmazai a 0, 2, illetve 4 eleműek. Ezekből rendre $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{4}$ van, ami összesen $1 + 10 + 5 = 16$ darab.

4. A Balaton valóság-hű modelljét szeretnénk elkészíteni. Az adatok szerint a Balaton hossza 77 km, felszíne 594 km², átlagos mélysége 3,6 m, legmélyebb pontja 11 m.

a) Hány centiméter mélyen lesz a modellünk legmélyebb pontja a felszínhez képest, ha annak hossza a terepasztalon 1 m?

b) Mennyi a modellünk léptéke (méretaránya)?

c) Hány centiliter víz kell a modellhez, ha azt valóban vízzel szeretnénk feltölteni?

d) A Balatont egy helikopterről fentről is megtekintjük, hogy lássuk, mennyire hasonlít a modellünkre. A tó két legtávolabbi, egymástól 77 km-re lévő pontját nézzük hossz tengelyére merőlegesen, középpontja felé repülve. 4 km távolságban, 900 m magasról mekkora szögben látjuk a tavat? (14 pont)

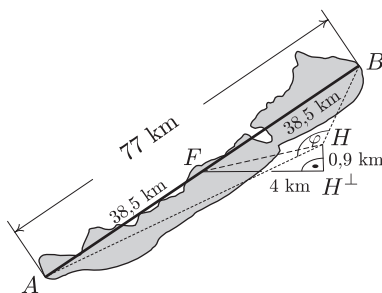
Megoldás. a) A megfelelő hosszúságok arányát felírva

$$\frac{h}{11 \text{ m}} = \frac{1 \text{ m}}{77 \text{ km}} = \frac{1 \text{ m}}{77000 \text{ m}}, \quad \text{amiből} \quad h = \frac{11 \text{ m}}{77000} \approx 0,0143 \text{ cm} \quad \text{adódik.}$$

b) Az előző részben felírt megfelelő hosszúságok aránya a hasonlóság aránya: $\lambda = \frac{1}{77000}$. Tehát a lépték 1 : 77000.

c) A Balatonban $V = 594 \cdot 10^6 \cdot 3,6$ (m³) víz van. A modellben $V' = \lambda^3 \cdot V \approx 0,468$ cl víz van.

d) Legyen a Balaton két legtávolabbi pontja A és B , a közepe F . Az AB szakaszra merőlegesen érkező helikopter a 0,9 km magasan lévő H pontból nézi az AB távolságot, a H pont merőleges vetülete a Balaton síkjára H^\perp . A feladat az $AHB \sphericalangle$ szög meghatározása.



Az $FHH^\perp \Delta$ derékszögű, így

$$\overline{FH} = \sqrt{4^2 + 0,9^2} = 4,1 \text{ km.}$$

$FH \perp FB$, és így $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{FB}{FH}$, tehát $\varphi \approx 167,84^\circ$.

II. rész

5. Egy bank a következő ajánlattal kívánja ügyfelei körét bővíteni: aki a megadott határidőig pénzét áthozza a fiókba fél éves lekötéssel, az első hat hónapban évi 5% kamatot kap. Az apró betűs részt elolvasva megtudhatjuk, hogy fél év után havi lekötéssel, évi 1,5% kamattal marad a fiókban a pénzünk. (A havi lekötés azt jelenti, hogy amennyiben előbb vesszük ki a pénzünket, a teljes kamatot elveszítjük a csonka hónapra.) 1 millió forintot teszünk be a bankba. Ezen feltételek ismeretében válaszoljunk a következő kérdésekre:

- Mennyi pénzünk lesz fél év múlva?
- Mennyit kamatozott egy év alatt a betett 1 millió forintunk?
- Korábbi bankfiókunkban hagyva a pénzünket évi 2%-os a kamatot kapnánk havi lekötés mellett. Legfeljebb mennyi időre éri meg áthozni a pénzünket az új helyre? (16 pont)

Megoldás. a) Fél év alatt 5% kamattal kell számolni, de nem a teljes évre, csupán feleannyi időre. Így $1\,000\,000 \cdot (1 + 0,05)^{\frac{1}{2}}$, vagyis egészre kerekítve 1 024 695 Ft-unk lesz.

b) A teljes évre a kamat:

$$(1 + 0,05)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + 0,015)^{\frac{1}{2}} \approx 1,0324,$$

tehát kb. 3,24% a kamat a teljes évre.

(A második félévben már csak 1,5% volt a kamat, így $1\,024\,695 \cdot (1,015)^{\frac{1}{2}} \approx 1\,032\,352$ forintunk lett.)

b) A feladat megállapítani, hogy hány évre érdemes áthozni a pénzünket a feltételeknek megfelelően. (Feltételezzük, hogy a két bank egyéb költségei nem különböznek, és így csak a hűségidőn múlik, hogy érdemes-e átmenni egyik bankból a másikba.)

$$1\,000\,000 \cdot 1,02^n = 1\,000\,000 \cdot 1,05^{\frac{1}{2}} \cdot 1,015^{n-\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{1,02}{1,015}\right)^n = \left(\frac{1,05}{1,015}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$n = \frac{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1,05}{1,015}\right)}{\ln \left(\frac{1,02}{1,015}\right)} \approx 3,45.$$

Tehát kb. három és fél évnél kevesebb időtartam esetén megéri áthozni a pénzt az új feltételeknek megfelelően. (Vagyis hosszabb időre nem éri meg áthozni a pénzünket.)

6. Ugorjunk másfél évet. Az egyetemek új előírása miatt a 2017-es érettségien igen sokan választották a matematikát emelt szinten. 10%-uknak 90% feletti lett az eredménye.

a) Az emelt szinten érettségiző diákok közül véletlenszerűen megkérdezve 10-et mekkora annak az esélye, hogy közülük pontosan ketten 90% feletti érettségit tettek?

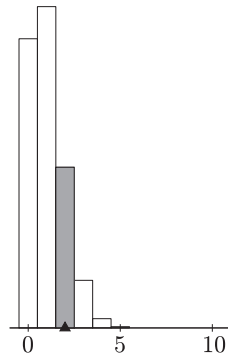
b) Internetes felmérésen 100 diákot kérdeztek meg véletlenszerűen az emelt szinten érettségizők közül. Mekkora a valószínűsége, hogy legfeljebb 2-en vizsgáltak 90% feletti eredménnyel? És annak, hogy a 100 megkérdezett diákból legfeljebb ketten vannak azok, akiknek nem sikerült 90% felett az eredményük?

c) (Az emelt szinten túlmutató kérdés.) Az OH statisztikájában kutakodunk. A 40 000 emelt szintű vizsgázo eredményét tekintve 90%-os biztonsággal hány 90% feletti eredményes vizsgázóra számíthatunk? (16 pont)

Megoldás. a) Az érettségizők nagy száma miatt binomiális eloszlással számolhatunk. A visszatevéses urna-modell szerint 0,1 valószínűséggel választhatjuk ki a 90% feletti tanulókat, s a maradék nyolcat 0,9 valószínűséggel. Ezen tanulókat pedig $\binom{10}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki. Eszerint

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,9^8 \cdot 0,1^2 \approx 0,1937.$$

Tehát kb. 19,37% annak az esélye, hogy pontosan két 90% feletti eredményű tanulót találunk az adathalmazban.



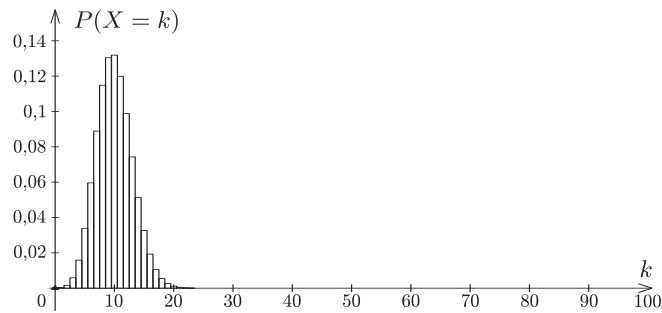
(A grafikonról jól látszik, hogy a legnagyobb esélye annak lenne, hogy egy tanulót találjunk, aki a feltételnek megfelel.)

b) Annak az esélye, hogy legfeljebb két 90% feletti eredményt nyújtó diákot találjunk, azzal egyezik meg, hogy pontosan kettő, vagy pontosan egy, illetve egy ilyen diákot sem találunk a 10 tanuló között.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \sum_{i=0}^2 \binom{100}{i} \cdot 0,9^{100-i} \cdot 0,1^i \approx$$

$$\approx 0,000\,027 + 0,000\,295 + 0,001\,623 = 0,001\,945.$$

Tehát annak az esélye, hogy legfeljebb két 90% feletti eredményt író tanulót találunk, kb. 0,19%, közel nulla. (Ez a lenti grafikonon is jól leolvasható, a görbe bal széle.)

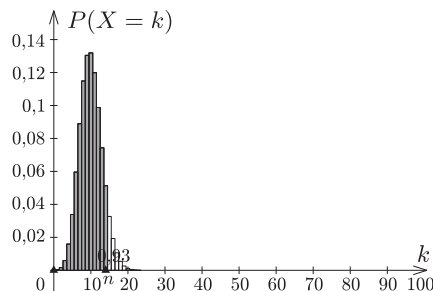


Annak az esélye, hogy legfeljebb két olyan diákot találjunk, akiknek nem sikerült 90% felett az érettségijük, megegyezik azzal, hogy 0, 1 vagy 2 ilyen diák van.

$$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = \sum_{i=0}^2 \binom{100}{i} \cdot 0,1^{100-i} \cdot 0,9^i \approx 0.$$

c) A feladat szerint nem szeretnénk nagyon hibázni, 90% biztonsággal akarjuk meghatározni azon vizsgázók számát, akik 90%-nál jobban teljesítettek. A kérdés tehát az, hogy legfeljebb hány ilyen tanulóra számíthatunk 90%-os biztonsággal.

Az előző grafikonokból is jól látszik, hogy eszerint azt az n értéket keressük, melynél kisebb n -ekre az oszlopok területe a teljes grafikon területének 90%-a lesz. Ez a számítás binomiális eloszlással legfeljebb számítógép segítségével (pl. GeoGebra – ld. a GEOMATECH¹ oldalán lévő statisztikai feladatokat) lenne elvégezhető, így közelítsük eloszlásunkat normális eloszlással.

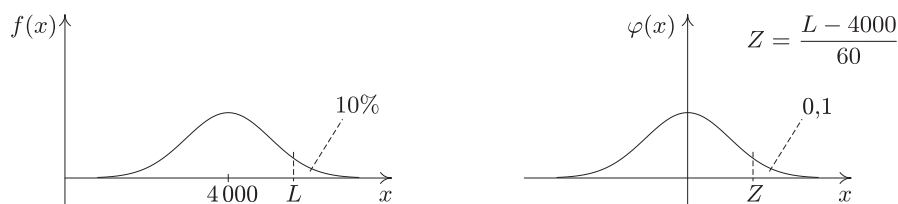


Az eloszlás várható értéke $E(X) = 0,1 \cdot 40\,000 = 4\,000$, szórása

$$D(X) = \sqrt{0,1 \cdot 0,9 \cdot 40\,000} = 60.$$

A normális eloszláshoz a görbénket transzformálnunk kell, hogy a jól ismert Gauss-görbét megkapjuk ($f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$):

1. toljuk el a maximumát az y -tengelyhez ($E(X)$ -szel való eltolás);
2. alakítsuk úgy át, hogy területe 1 legyen (összuk $D(X)$ -szel „belül”, hogy merőleges affinitást hajtsunk végre az x -tengely irányában).



Ekkor a görbe alatti integrálás lenne a feladatunk, de „szerencsére” a függvénytáblázat $\Phi(Z)$ -táblázatát használva visszakereshetjük, hogy milyen x abszcisszáig integrálva lenne a görbe alatti terület 0,9:

$$P(X \leq L) = \Phi\left(\frac{L - 4000}{60}\right) = 0,9, \quad \frac{L - 4000}{60} = 1,28, \quad L = 4076,8.$$

Tehát elegendő legfeljebb 4077 tanulóat mondani, hogy 90% biztonsággal eltaláljuk, hogy hányan írták meg 90%-nál jobban a dolgozatot.

7. Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény:

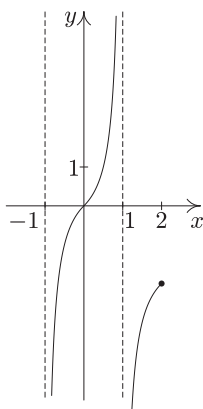
$$f: x \mapsto \frac{x}{1 - |x|}.$$

- Ábrázoljuk a függvényt a $]-1; 2[\setminus \{1\}$ intervallumon.
- Adott a $g(x) = 2x$ függvény. Mi lesz az $f \circ g$ függvény értékkészlete a $]-1; 2[$ intervallumon?
- Határozzuk meg az f függvény inverzét a $]-1; 1[$ intervallumon, s ábrázoljuk az f^{-1} függvényt. (16 pont)

Megoldás. a) A függvény ábrázolásához bontsuk fel az abszolútértéket:

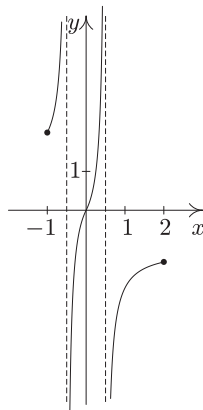
$$f: x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1 - (-x)} = \frac{x}{1 + x} = \frac{x + 1}{x + 1} + \frac{-1}{x + 1} = \frac{-1}{x + 1} + 1, & \text{ha } x < 0, x \neq -1, \\ \frac{x}{1 - x} = -\frac{x - 1 + 1}{x - 1} = \frac{-1}{x - 1} - 1, & \text{ha } x \geq 0, x \neq 1. \end{cases}$$

Ezekről az alakokról jól leolvashatók a függvénytranszformációk. A megfelelő intervallumokon ábrázoljuk a függvényeket (1. ábra).



1. ábra

b) Az $f(x) \rightarrow f(2x)$ függvénytranszformáció egy x tengely irányú merőleges affinitásnak felel meg (x tengely irányában történő zsugorítás, 2. ábra).



2. ábra

Természetesen ezt is meggondolhatjuk az abszolútérték bontásának segítségével:

$$f: x \mapsto \begin{cases} \frac{2x}{1 - (-2x)} = \frac{x}{\frac{1}{2} + x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} + 1, & \text{ha } x < 0, x \neq -\frac{1}{2}, \\ \frac{2x}{1 - 2x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} - 1, & \text{ha } x \geq 0, x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ábrázolás nélkül is, az előzőek alapján, látható, hogy a függvény értékkészlete a teljes valós számhalmaz.

c) A függvény a $]-1; 1[$ intervallumon kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, így invertálható.

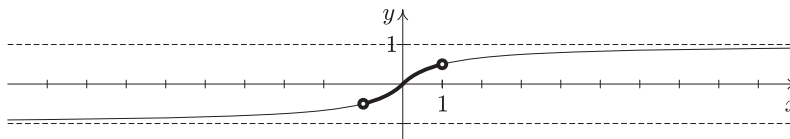
$x < 0$ esetén:

$$y = \frac{x}{1+x} \quad \xrightarrow{x \leftrightarrow y} \quad x = \frac{y}{1+y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{x-1} - 1.$$

$x \geq 0$ esetén:

$$y = \frac{x}{1-x} \quad \xrightarrow{x \leftrightarrow y} \quad x = \frac{y}{1-y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{x+1} + 1.$$

A vastagon ábrázolt rész a kért $]-1; 1[$ intervallumon értelmezett függvény.



8. Lakásunk nappali szobája hatszög alakú, melynek oldalai rendre $AB = 3,4$, $BC = 2,3$, $CD = 2,3$, $DE = 2,3$, $EF = 3,4$, valamint $FA = 3,7$ méteresek. Az AB és a BC , valamint a DE és az EF oldalak merőlegesek egymásra. A szoba parkettázásához szeretnénk megállapítani az alapterületét, melyet kétféleképpen teszünk meg.

Mi megmérjük a szoba AD átlóját, melyet $4,8$ méteresnek találunk, míg fiaink a szoba F csúcsánál lévő szöget határozzák meg, melyet 120° -nak mérnek. A hosszúságot 5 cm-es pontossággal, míg a szöveget 5° -os pontossággal tudjuk eszközeinkkel megmondani.

- A szög vagy a hosszúság relatív hibája nagyobb?
- Mekkorák a területek a két esetben?
- Mennyire pontosan ismerjük a két esetben az AD átlót?
- Melyik mérést fogadjuk el inkább?

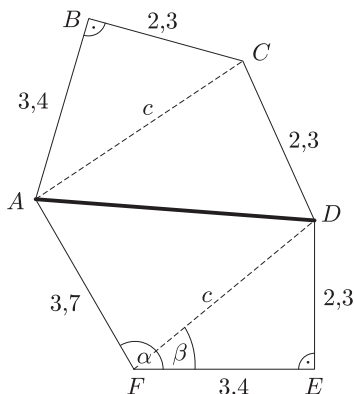
(16 pont)

Megoldás. a) Tudjuk, hogy a hosszúság abszolút hibája: $H(\overline{AB}) = 0,05$ m. A relatív hibája: $R(\overline{AB}) = \frac{0,05}{4,8} \approx 0,01$,

vagyis közelítőleg 1%. A szög esetén: $H(\angle AFE) = 5^\circ$, $R(\angle AFE) = \frac{5}{120} \approx 0,04$, ami 4%. Tehát a szög relatív hibája a nagyobb.

b) Készítsük el a szoba vázlatrajzát. Az ábrán látható c oldalt Pitagorasz-tétel segítségével számíthatjuk ki:

$$c = \sqrt{2,3^2 + 3,4^2} \approx 4,1.$$



Az első esetben a ABC és DEF háromszögek területét két befogójuk segítségével, míg a két belső háromszög területét Heron-képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$T = 2 \cdot \frac{2,3 \cdot 3,4}{2} + \sqrt{5,6 \cdot 0,8 \cdot 3,3 \cdot 1,5} + \sqrt{6,3 \cdot 2,6 \cdot 2,2 \cdot 1,5} \approx 19,88 \text{ m}^2.$$

A második esetben az α szög segítségével határozzuk meg AD hosszúságát (koszinusz-tétel). Az FED háromszögben $\operatorname{tg} \beta = \frac{2,3}{3,4}$, amiből $\beta \approx 34,08^\circ$.

$$AD = \sqrt{3,7^2 + c^2 - 2 \cdot 3,7 \cdot c \cdot \cos(\alpha - \beta)} \approx 5,33.$$

Ezután a területeket hasonlóképpen határozhatjuk meg:

$$T' = 2 \cdot \frac{2,3 \cdot 3,4}{2} + \sqrt{5,1 \cdot 1,27 \cdot 2,8 \cdot 1} + \sqrt{8,815 \cdot 1,715 \cdot 2,115 \cdot 1,985} \approx 18,38 \text{ m}^2.$$

c) A hosszmerést ± 5 cm hibával végezhetjük, ezért $475 \text{ cm} < AD < 485 \text{ cm}$, a szöggel való számolásnál 530 cm -t kaptunk, tehát biztosan sokkal pontatlanabb ez az adat.

d) A két esetben – a hibaszámítás tekintetében – azonos műveletsorozatokat hajtunk végre az AD átlón, így a második esetben nagyobb hibával ismerjük a területet, mint az elsőben.

9. A mérnökök egy gépkocsi mozgását figyelték műszerek segítségével négy másodpercen át. A pillanatnyi sebességek (m/s-ban) mért adataira a számítógép a következő függvényt illesztette:

$$v(t) = 2,5t^3 - 16t^2 + 33t + 5.$$

- Mekkora sebességre gyorsult fel az autó az első másodperc végére?
- A sebességváltás pillanatában nem gyorsult az autó. Mikor volt ez?
- A gépkocsi pillanatnyi fogyasztását (centiliterben mérve) a következő függvény írja le:

$$F(t) = 2 \cdot 10^{-2} \cdot (v'(t) + 50t).$$

Hány centiliter üzemanyag fogyott az első két másodperc alatt?

(16 pont)

Megoldás. a) Az első másodperc végére

$$v(t) = 2,5 \cdot 1^3 - 16 \cdot 1^2 + 33 \cdot 1 + 5 = 24,5 \text{ (m/s)},$$

azaz $88,2 \text{ km/h}$ sebességre gyorsult fel.

b) Amikor az autó nem gyorsul, akkor a Δt idő alatti sebességváltozása nulla. Ezek szerint a sebesség deriváltjának nullahelyét keressük.

$$v'(t) = 7,5 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 33 = 0.$$

Ennek nullahelyei $t_1 = 1,745 \text{ s}$ -nál, illetve $t_2 = 2,522 \text{ s}$ -nál vannak. Ekkor nem gyorsult az autó, tehát ekkor lehettek a sebességváltás pillanatai. (Ehhez automata sebességváltót lehet elképzelni, mellyel a Forma-1 pilótái versenyeznek.)

c) A megadott függvény a gépkocsi pillanatnyi fogyasztását adja meg. Az első két másodperc alatt a gépkocsi fogyasztását ennek a függvénynek a $[0; 2]$ intervallumon vett határozott integrálja adja meg.

$$\begin{aligned} \int_0^2 F(t) dt &= \int_0^2 2 \cdot 10^{-2} \cdot (v'(t) + 50t) dt = \\ &= \int_0^2 2 \cdot 10^{-2} \cdot (7,5 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 33 + 50t) dt = \\ &= 2 \cdot 10^{-2} \left[7,5 \frac{t^3}{3} + 18 \frac{t^2}{2} + 33t \right]_0^2 = 2,44 \text{ (cl)}. \end{aligned}$$