

„A matematika a fizika része. A fizika kísérleti tudomány, a természettudomány része. A matematika a fizikának az a része, amelyben a kísérletek olcsók.” E mondatokkal kezdte a matematika tanításáról szóló előadását (lásd [3]) a 20. század egyik zseniális matematikusa, Vlagyimir Igorevics Arnold (1937–2010), aki a fizikai intuíciót a matematikai gondolkodás nélkülözhetetlen elemének tekintette (egyedi látásmódjáról bárki képet kaphat az idézett előadásából, illetve a magyarul középiskolai szakköri füzetként megjelent [2] könyvecskéjéből). Bár Arnold iménti kijelentése kissé merésznek tűnik, annyi mindenesetre bizonyos, hogy számos, tisztán matematikainak látszó eredmény mögött valójában a józan ész számára teljesen világos és természetes fizikai elvek bújnak meg. Ezek a rejtett gondolatok gyakran roppant váratlan helyeken bukkannak fel – a [7] könyv például egy egész sereg meglepő összefüggésre világít rá –, és gyönyörű megnyilvánulásai a két tudományterület egymáshoz való szoros kötődésének.

Jelen írásunk célja is éppen az, hogy egy szép és talán kevésbé ismert példáját mutassuk annak, ahogyan egyszerű fizikai megfontolások matematikai álruhát öltenek. Mindössze ellenállásokat kell megfelelő módon összekapcsolni, és rögtön nevezetes egyenlőtlenségekhez jutunk, mint például a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség, a Milne-egyenlőtlenség, amely egy KöMaL feladat megoldásában is szerephez jutott, valamint a Minkowski-egyenlőtlenség egy speciális esete. Cikkünkben az említett egyenlőtlenségeket először ellenállás-hálózatokbeli fizikai megfontolások segítségével „bizonyítjuk”, majd matematikailag is igazoljuk, közben pedig a történeti háttérükről szintén szót ejtünk. Mindvégig csupán elemi eszközökre támaszkodunk, nagyrészt matematikára, az elején egy kis fizikával fűszerezve. Néhány eredményt feladat formájában fogalmazunk meg és tűzünk ki, ezzel elősegítve a témában való elmélyülést. Kezdődjön tehát a kaland.

1. Bemelegítés: dióhéjban az eredő ellenállásról

Mielőtt rátérnénk az egyenlőtlenségekre, elevenítsük fel, hogy mit tanulunk a fizikaórán ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása esetén az eredő ellenállásról. Aki úgy érzi, hogy mindenre emlékszik, vagy még frissek az ismeretei, az (első olvasáskor) nyugodtan ugorjon a következő szakaszra.

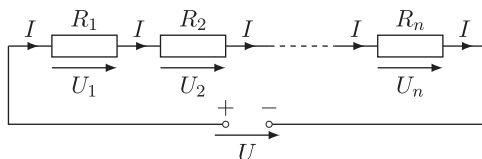
Ha egy U feszültségű áramforrásra az $R_1, R_2, \dots, R_n$ ellenállásokat sorosan kapcsoljuk az 1. ábrán látható módon, akkor mindegyik ellenálláson ugyanakkora I áram folyik keresztül, az áramforrás feszültsége azonban megoszlik az ellenállásokon, méghozzá Kirchhoff huroktörvénye alapján

$$(1.1) \quad U = U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

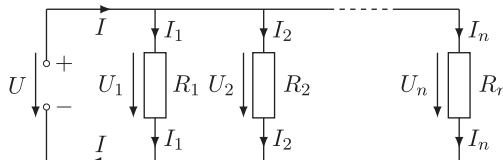
ahol U_i az i -edik ellenállásra eső feszültség. Mivel Ohm törvénye szerint $U_i = R_i \cdot I$ és $U = R_e \cdot I$, ahol R_e jelöli az eredő ellenállást, amellyel az n darab ellenállás helyettesíthető, ezért az (1.1) összefüggés alapján $R_e I = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I$. Következésképpen

$$(1.2) \quad R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n,$$

tehát soros kapcsolás esetén az eredő ellenállás az egyes ellenállások összege.



1. ábra. Ellenállások soros kapcsolása



2. ábra. Ellenállások párhuzamos kapcsolása

Ezzel szemben, ha az $R_1, R_2, \dots, R_n$ (nem nulla) ellenállásokat a 2. ábrának megfelelően párhuzamosan kapcsoljuk az áramforrásra, akkor az egyes ellenállásokra ugyanakkora U feszültség esik, viszont különböző nagyságú $I_1, I_2, \dots, I_n$ áramok folynak rajtuk keresztül, amelyek összege Kirchhoff csomóponti törvénye szerint éppen az áramforráson áthaladó áram nagysága: $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$. Ekkor ismét Ohm törvényét alkalmazva

$$\frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n},$$

így

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n},$$

vagyis párhuzamos kapcsolás esetén az eredő ellenállás reciproka az egyes ellenállások reciprokainak összegével egyezik meg. Az eredő ellenállás tehát az egyes ellenállások reciprokösszegének reciproka, vagyis az $R_1, \dots, R_n$ pozitív számok harmonikus közepének n -edrészze:

$$(1.3) \quad R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}.$$

(A későbbiekben – többek között tipográfiai és esztétikai okokból kifolyólag – néhol reciprok helyett (-1) -edik hatványt fogunk írni.)

1.1. történeti megjegyzés. Érdekességképpen megemlíjtük, hogy *Gustav Robert Kirchhoff* (1824–1887) az egykori poroszországi Königsberg (mai nevén Kaliningrád) városában született, majd tanult, és 1845-ben egyetemistaként fogalmazta meg a hurok- és csomóponti törvényt. A város hídjait bejáró sétáról szól a középiskolások körében is bizonyára jól ismert königsbergi hidak problémája, amelyet a svájci *Leonhard Euler* (1707–1783) oldott meg 1736-ban – innen ered az Euler-séta elnevezés is –, és indította el ezzel a gráfelmélet fejlődését.

2. Rayleigh monotonitási törvénye

Az előző szakaszban átismételt összefüggések mellett az eredő ellenállással kapcsolatban szükségünk lesz még egy észrevételre, amelyet gyakran Rayleigh monotonitási elveként vagy törvényeként emlegetnek – a változatosság kedvéért mi is mindkét megnevezést használni fogjuk.

2.1. elv (Rayleigh monotonitási elve/törvénye). Ha ellenállások egy hálózatában valamelyik ellenállást növeljük, akkor a hálózat eredő ellenállása nem csökkenhet; valamely ellenállást csökkentve pedig az eredő ellenállás nem növekedhet.

2.2. történeti megjegyzés. Az elvet a később Nobel-díjjal kitüntetett angol fizikus, *John William Strutt* (1842–1919), ismertebb nevén *Lord Rayleigh* 1871-ben hangtani vizsgálódásai során használta. Ennek segítségével adott alsó és felső becslést különböző elektromos vezetők ellenállására. Rayleigh módszerére a kiváló skót fizikus, *James Clerk Maxwell* (1831–1879) a Tanulmány az elektromosságról és mágnességről című, 1873-ban megjelent – az azóta a nevét viselő Maxwell-egyenletek első alakját is tartalmazó – híres művében is hivatkozik. Mindketten úgy fogalmazták az elvet, hogy ha egy vezető valamely részének ellenállását megváltoztatjuk, és a többi részt változatlanul hagyjuk, akkor az egész vezető ellenállása nő, ha a rész ellenállását növeltük, és csökken, ha csökkentettük (lásd Maxwell [8] művének 353–354. oldalait).

Rayleigh törvénye minden bizonnyal sokak számára nem igényel magyarázatot, szemléletesen teljesen világos vagy legalábbis hihető. Az mindenesetre biztos, hogy az 1. és 2. ábrák hálózatai esetében érvényes, hiszen könnyen látható, hogy az eredő ellenállást megadó (1.2) és (1.3) kifejezések bármely R_i ellenállás növelésével növekednek.

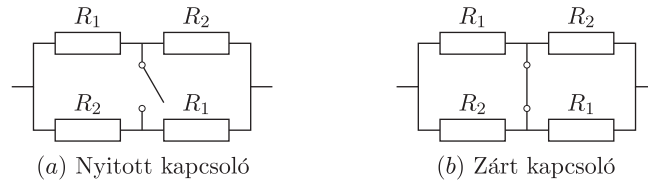
Valószínűleg sokkal látványosabb Rayleigh törvénye, ha áramkörök helyett például vízvezeték-hálózatra gondolunk, amelyben egy szakasz leszűkítésével a rendszerben adott időegység alatt átfolyó víz mennyisége nem növekedhet. Ennél még meggyőzőbb lehet, ha eszünkbe jutnak a különböző úthálózatokon kialakuló torlódások, amelyek egy-egy útszakasz leszűkítése vagy lezárása következtében alakulnak ki. Aki az előbbi szemléltető példák ellenére továbbra is – és talán nem alaptalanul – kételkedik, annak Maxwell véleményét ajánljuk a figyelmébe (lásd Maxwell művének korábban idézett oldalait), amely szerint „*Ez az elv magától értetődőnek tekinthető ...*”.

Természetesen matematikailag semmilyen szemlélet, intuíció vagy akár egy zseniális tudós kijelentése nem bizonyító erejű, de ez számunkra most nem is lényeges, hiszen a későbbiekben az elvet éppen az eredmények intuitív megsejtésére szeretnénk használni, nem pedig bizonyításra (és emiatt remélhetőleg az is megbocsájtható, ha ebben a fizikáról szóló részben a szemléletesség érdekében néhol esetleg kevésbé egzaktul fogalmaztunk a kelleténél). Annyit azért mindenképpen érdemes hozzáfűznünk, hogy Rayleigh törvénye valójában levezethető egy másik fizikai elvből, amely szerint egy adott hálózaton átfolyó egységnyi áram az összes lehetséges áthaladó egységnyi áramok közül a minimális energiavesztéssel jár. Ezt az elvet szokás az ír fizikus, *William Thomson* (1824–1907), ismertebb nevén Lord Kelvin nevéhez kötni. Mindezekről bővebben olvashatunk az [5], [7] könyveknek a monotonitási elvről szóló fejezeteiben.

Végül megemlíjtük, hogy a monotonitási törvény közlekedési hálózatokkal való illusztrációja egyáltalán nem légből kapott, ugyanis az elektromos hálózatok és az úgynevezett véletlen bolyongások elmélete – amelyben egy elágazásban a véletlen határozza meg a továbbhaladás irányát – szoros kapcsolatban áll egymással (erről bővebben olvashatunk a kiváló és nagyrészt középiskolások számára is érthető [5] könyvben).

3. A számtani és harmonikus közép egyenlőtlensége

Ennyi fizikai bevezető után térjünk most rá a matematikára: milyen eredményeket nyerhetünk az elektromos ellenállásokra vonatkozó ismereteink segítségével? Meglepő módon a számtani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség egyszerűen „kipottyan” Rayleigh monotonitási törvényéből.



3. ábra. Számtani és harmonikus közép elektromos hálózatokban

Tekintsük ugyanis a 3. ábrán látható kapcsolási rajzokat: kétféle sorrendben sorosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállásokat párhuzamosan kapcsoltunk, és a két ágat egy kapcsolóval kötöttük össze, amely először nyitott, aztán zárt állapotban van. Számítsuk ki mindkét esetben a hálózat eredő ellenállását a kapcsoló belső ellenállását elhanyagolhatónak feltételezve. Nyitott kapcsoló esetén az egyes ágakban az eredő ellenállás $R_1 + R_2$, így a rendszer eredő ellenállása

$$R_e^{\text{nyitott}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_1 + R_2}} = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

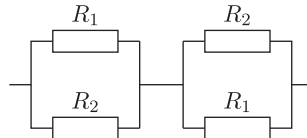
Zárt kapcsoló esetén az ellenállás-hálózat egyenértékű a 4. ábrán látható rendszerrel, amelyben sorba van kapcsolva két komponens, mindegyikben párhuzamosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállásokkal. Ekkor mindkét komponens eredő ellenállása $(R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}$, ezért a rendszer eredő ellenállása

$$R_e^{\text{zárt}} = \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

És most jön a csavar. Rayleigh monotonitási törvénye alapján a kapcsoló zárásával a hálózat ellenállása nem növekedhet, hiszen nyitott állapotban a kapcsoló „végtelen ellenállású”, míg zárás után az ellenállása nulla – a közlekedési hálózatos példával élve, a város egy eddig felújítás alatt álló útján megindulhat a forgalom. Ebből következően $R_e^{\text{nyitott}} \geq R_e^{\text{zárt}}$, azaz

$$(3.1) \quad \frac{R_1 + R_2}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}},$$

ami éppen az R_1, R_2 pozitív számok számtani és harmonikus közepei közötti egyenlőtlenség.



4. ábra. Zárt kapcsoló esete átrajzolva

Ahogy korábban, most is hangsúlyozzuk, hogy az iménti érvelés nem bizonyítás, hanem inkább egy fizikai elv látványos megjelenési formája (vagy akinek jobban tetszik, tekinthet a matematikai eredményre úgy, mint az elv egy speciális esetének bizonyítására). Természetesen a (3.1) egyenlőtlenség jól ismert, és egy korrekt igazolását nyerjük az alábbi egyszerűen ellenőrizhető azonosság segítségével, amelyből az egyenlőség feltétele, nevezetesen $R_1 = R_2$ is azonnal következik:

$$(3.2) \quad \frac{R_1 + R_2}{2} - \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{(R_1 - R_2)^2}{2(R_1 + R_2)}.$$

Jegyezzük meg azt is, hogy a (3.1) egyenlőtlenség pozitív számokra egyenértékű a számtani és mértani közepek egyenlőtlenségével, hiszen mindkét oldalnak az $(R_1 + R_2)/2$ kifejezéssel való szorzása után az

$$\frac{(R_1 + R_2)^2}{4} \geq R_1 R_2$$

alakot ölti, ahol az egyes oldalakon éppen a megfelelő közepek négyzete áll.

Dacára annak, hogy a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség előbbi „bizonyítása” igen meglepő és szellemes, mégsem terjedt el igazán a matematikai köztudatban. Bár a gondolatmenet általánosítása már 1960-ban megjelent (a történeti háttérrel lásd részletesen a 7.11. megjegyzésben), mégis viszonylag kevés olyan helyen tesznek említést róla, amely széles olvasóközönségnek szól (angolul a [7] könyvben és a [10] cikkben, magyar nyelvű szakirodalomban szinte sehol), és csak szűkebb körben ismerik. A szerző közvetlen munkatársai körében végzett mini közvéleménykutatás szerint lényegében teljesen ismeretlen, pedig az ötlet figyelemre méltó és messzemenően általánosítható. Folytassuk is ennek bemutatását.

4. Egy általánosítás

Az előző szakaszbeli gondolatmenet talán legkézenfekvőbb általánosítása, ha R_1 és R_2 ellenállások helyett (az egyszerűség kedvéért kis betűvel jelölt) a, b, c, d ellenállásokat tekintünk az 5. ábrán látható módon. Ekkor nyitott kapcsoló esetén az eredő ellenállás

$$R_e^{\text{nyitott}} = \frac{1}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d}} = \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d},$$

míg zárt kapcsoló mellett

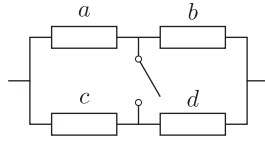
$$R_e^{\text{zárt}} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}} = \frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}.$$

A monotonitási elv alapján $R_e^{\text{nyitott}} \geq R_e^{\text{zárt}}$, vagyis

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} \geq \frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d}.$$

Az imént megsejtett egyenlőtlenség egy matematikailag helyes bizonyítása – a (3.2) azonosság mintájára – az alábbi észrevételen múlik:

$$(4.1) \quad \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} - \frac{ac}{a+c} - \frac{bd}{b+d} = \frac{(ad-bc)^2}{(a+b+c+d)(a+c)(b+d)}.$$



5. ábra. A (4.2) egyenlőtlenség hálózata

4.1. feladat. Ellenőrizzük a (4.1) azonosságot.

A (4.1) összefüggésből az egyenlőség kérdésére is azonnal választ kapunk, és rögtön meg is fogalmazhatjuk egy állítás formájában az eredményt.

4.2. állítás. Legyenek a, b, c, d nemnegatív valós számok, amelyekre $a+c > 0$ és $b+d > 0$. Ekkor

$$(4.2) \quad \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d} \geq \frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d},$$

és egyenlőség csakis $ad = bc$ esetén áll fenn.

4.3. megjegyzés. Az egyenlőség $ad = bc$ feltételét – itt most lényeges, hogy a, b, c, d nem lehetnek különböző előjelűek – átfogalmazhatjuk úgy is, hogy az (a, b) és (c, d) síkbeli vektorok azonos irányúak (beleértve azt az esetet is, amikor valamelyik esetleg nullvektor). Valóban, ez utóbbi összefüggés azt jelenti, hogy van olyan $\lambda \geq 0$ szám, amelyre $a = \lambda c$ és $b = \lambda d$. Ha $\lambda = 0$, akkor $(a, b) = (0, 0)$, így a két vektor azonos irányú; ha pedig $\lambda > 0$, akkor $d = b/\lambda$, és így $ad = (\lambda c) \cdot (b/\lambda) = bc$. Fordítva, amennyiben $ad = bc \neq 0$, akkor $a/c = b/d = \lambda > 0$, hiszen ebben az esetben a, b, c, d pozitív számok. Ha pedig $ad = bc = 0$, akkor a szimmetria miatt feltehető, hogy $a = 0$, ekkor $b = 0$ vagy $c = 0$; az első esetben $(a, b) = (0, 0)$, míg a másodikban $(a, b) = (0, b)$, $(c, d) = (0, d)$, mindkét esetben a kérdéses vektorok azonos irányúak.

4.4. feladat. Mutassuk meg, hogy nemnegatív a, b, c, d számok esetén az (a, b) és (c, d) vektorok pontosan akkor azonos irányúak, amikor az (a, c) és (b, d) vektorok azonos irányúak.

Bevezetve a

$$(4.3) \quad H(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$$

jelölést az x, y nemnegatív és egyszerre nem nulla számok harmonikus közepére (a harmonikus közép eredeti formájában az $x, y > 0$ feltételezés lenne szükséges), a (4.2) egyenlőtlenség 2-vel való szorzás után a következő, könnyen megjegyezhető alakot ölti:

$$(4.4) \quad H(a+b, c+d) \geq H(a, c) + H(b, d).$$

4.5. feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a (4.4) egyenlőtlenség (vagy esetleg a fordított iránya) igaz marad-e, ha a harmonikus közepet a számtani ($A(x, y)$), mértani ($G(x, y)$) és négyzetes ($Q(x, y)$) közepek valamelyikére cseréljük, ahol

$$A(x, y) = \frac{x+y}{2}, \quad G(x, y) = \sqrt{xy}, \quad Q(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

A (4.2) egyenlőtlenség akármelyik alakját is nézzük, azt gondolhatnánk, hogy valószínűleg nem tartozik a versenyfeladatokban leggyakrabban alkalmazott egyenlőtlenségek közé. Ez azonban nem feltétlenül igaz, hiszen a (4.2) egyenlőtlenség nemrég például a KöMaL-ban is felbukkant, méghozzá a 2012. májusi számban kitűzött **B. 4461.** és **A. 563.** jelű feladatok egyik megoldásában kapott szerepet (lásd a nyomtatásban és az interneten közölt [6] megoldásokat). Az említett feladatok cikkünk témakörén kívül esnek, ezért most ezekre nem térünk ki. Annyit viszont még mindenképpen megemlítnék, hogy a két feladat megoldásában valójában a (4.2) egyenlőtlenség alábbi általánosítására volt szükség.

4.6. állítás. *Legyenek a, b, c, d nemnegatív valós számok, amelyekre $a + c > 0$ és $b + d > 0$, továbbá legyen $p \geq 1$ valós szám. Ekkor*

$$(a + b + c + d)^{p-2}(a + b)(c + d) \geq (a + c)^{p-2}ac + (b + d)^{p-2}bd,$$

és egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha $p = 1$ és $ad = bc$.

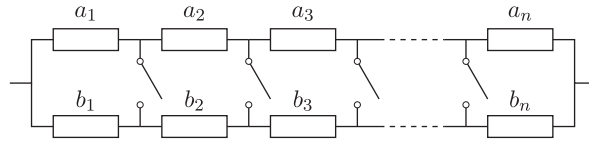
4.7. feladat. Igazoljuk a 4.6. állítást ($a, p = 1$ eset ismeretében). (Segítség: $(a + c)^{p-2} = (a + c)^{p-1}/(a + c)$.)

Térjünk vissza ezek után az ellenállásokra és folytassuk a Rayleigh-féle monotonitási törvény alkalmazásainak sorát.

5. A Milne-egyenlőtlenség

Egy további általánosítási lehetőség az 5. ábrán szereplő hálózatra, ha két ellenállás helyett n darabot kapcsolunk sorosan, majd két ilyen rendszert párhuzamosan kapcsolunk össze a 6. ábrán látható módon. Ekkor az összes kapcsolót nyitva hagyva, az egyes ágakban az eredő ellenállás $a_1 + \dots + a_n$ és $b_1 + \dots + b_n$, így az eredő ellenállás

$$R_e^{\text{nyitott}} = \frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{a_1 + \dots + a_n + b_1 + \dots + b_n}.$$



6. ábra. Az (5.1) egyenlőtlenség hálózata

Zárt kapcsolók mellett a hálózat a 7. ábrán láthatóval egyenértékű, ahol párhuzamosan kapcsolt a_i, b_i ellenállásokból álló komponensek vannak sorosan kapcsolva. Az egyes komponensek eredő ellenállása $a_i b_i / (a_i + b_i)$, ebből következően az összes kapcsoló zárása után a 6. ábra hálózatainak eredő ellenállása

$$R_e^{\text{zárt}} = \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

Mivel a Rayleigh-féle monotonitási törvény szerint $R_e^{\text{nyitott}} \geq R_e^{\text{zárt}}$, ezért $a_i + b_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) esetén várhatóan igaz a következő egyenlőtlenség:

$$(5.1) \quad \frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{a_1 + \dots + a_n + b_1 + \dots + b_n} \geq \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n},$$

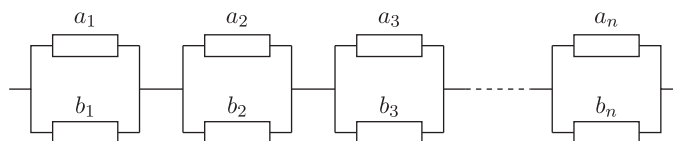
amit másképpen (2-vel való szorzás után) úgy is írhatunk, hogy

$$(5.2) \quad H(a_1 + \dots + a_n, b_1 + \dots + b_n) \geq H(a_1, b_1) + \dots + H(a_n, b_n).$$

Ez $n = 2$ esetén éppen a (4.2) egyenlőtlenség, ebből pedig teljes indukcióval nem nehéz belátni az általános esetet. Valóban, ha n -re igaz az (5.2) egyenlőtlenség, akkor az $a = a_1 + \dots + a_n$, $b = a_{n+1}$, $c = b_1 + \dots + b_n$, $d = b_{n+1}$ szereposztással a (4.2) egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} H(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}, b_1 + \dots + b_n + b_{n+1}) &\geq \\ &\geq H(a_1 + \dots + a_n, b_1 + \dots + b_n) + H(a_{n+1}, b_{n+1}), \end{aligned}$$

ahol a jobb oldalon az indukciós feltevés alkalmazásával éppen $(n + 1)$ -re adódik az (5.2) egyenlőtlenség.



7. ábra. A 6. ábra hálózata átrajzolva zárt kapcsolók esetén

Az iménti indukciós gondolatmenet segítségével azt sem nehéz igazolni, hogy egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha az $(a_1, \dots, a_n)$ és $(b_1, \dots, b_n)$ vektorok azonos irányúak, amin azt értjük, hogy létezik $\lambda \geq 0$ szám, amellyel $a_i = \lambda b_i$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Valóban, az egyenlőség feltétele $n = 2$ esetén a 4.3. megjegyzésből következik. Ha pedig n -re már tudjuk a feltételt, akkor az indukciós lépésből kiolvasható, hogy csak úgy lesz egyenlőség $(n + 1)$ -re, ha az indukciós feltevésben is egyenlőség áll fenn, tehát az $(a_1, \dots, a_n)$ és $(b_1, \dots, b_n)$ vektorok azonos irányúak, valamint az is szükséges, hogy az

$$(a, b) = (a_1 + \dots + a_n, a_{n+1})$$

és

$$(c, d) = (b_1 + \dots + b_n, b_{n+1}) = (\lambda(a_1 + \dots + a_n), b_{n+1})$$

vektorok azonos irányúak legyenek. Ebből szükségképpen $a_{n+1} = \lambda b_{n+1}$ adódik, tehát az $(a_1, \dots, a_{n+1})$ és $(b_1, \dots, b_{n+1})$ vektorok azonos irányúak.

Érvényes tehát a következő állítás.

5.1. állítás. *Legyenek a_i, b_i ($i = 1, \dots, n$) nemnegatív számok, amelyekre $a_i + b_i > 0$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor*

$$\frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{a_1 + \dots + a_n + b_1 + \dots + b_n} \geq \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az $(a_1, \dots, a_n)$ és $(b_1, \dots, b_n)$ vektorok azonos irányúak.

Érdemes megjegyeznünk, hogy az 5.1. állítás előbbieken bemutatott teljes indukciós bizonyítása mellett az általános esetben is működik az $n = 2$ esetén alkalmazott (4.1) azonosságnak megfelelő négyzetösszeggé való alakítás ötlete. Ennek tömör és átlátható megfogalmazásához azonban célszerű bevezetnünk egy – sokak számára bizonyára már ismerős – jelölést.

5.2. jelölés. Ha $a_1, \dots, a_n$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

amit úgy olvasunk, hogy „szumma $i = 1$ -től n -ig a_i ”. Használni fogjuk még a

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}$$

típusú jelölést is, amelyben – magától értetődően – az $1 \leq i < j \leq n$ feltételt kielégítő összes i, j indexpárra kell összegezni.

A szummás jelölés segítségével az 5.1. állítás valójában egy – kis odafigyeléssel és türelemmel – könnyen ellenőrizhető azonosságra vezethető vissza, amelyet az alábbi feladatban fogalmazunk meg (a feladat megoldása jó gyakorlási lehetőség a szummás jelölésmód elsajátításához).

5.3. feladat. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_i b_j - a_j b_i)^2}{(a_i + b_i)(a_j + b_j)}.$$

5.4. történeti megjegyzés. Az 5.1. állításban szereplő egyenlőtlenséget az irodalomban szokás Milne-egyenlőtlenségnek is hívni. *Edward Arthur Milne* (1896–1950) angol asztrofizikus és matematikus 1925-ben csillagászati vizsgáldásai kapcsán írta fel az egyenlőtlenség folytonos változatát integrálok segítségével (lásd a [9] cikket), és a bizonyítás közben lényegében megfogalmazta az általunk kimondott diszkrét változatot is. A Milne-egyenlőtlenség igazolását feladatként a neves kanadai, többnyire nehezebb versenyfeladatok kitűzésére specializálódott *Crux Mathematicorum* folyóirat is kitűzte 1996-ban. Egy évvel később három különböző megoldást jelentettek meg, amelyek egyike éppen az 5.3. feladatban szereplő azonosság (lásd [1]).

A szakasz zárásaként a nevezetes egyenlőtlenségekkel foglalkozó [4] könyvecske egy nehezebb feladatát idézzük, amely a Milne-egyenlőtlenség fényében szinte nyilvánvalóvá egyszerűsödik (ezért próbáljuk többféleképpen is megoldani, és a könyv megoldását is olvassuk el).

5.5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, \dots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{n}.$$

Hivatkozások

- [1] F. Ardila, K. W. Lau, V. N. Murty, Solution to problem 2113, *Crux Mathematicorum*, **23** (1997), 112–114. Elektronikus változat: <https://cms.math.ca/crux/v23/n2/page112-128.pdf>.
- [2] V. I. Arnold, *Katasztrófaelmélet*, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
- [3] V. I. Arnold, A matematika tanításáról (fordította: Kersner Róbert), *Magyar Tudomány*, 1998. október, 1247–1251. Elektronikus változat angolul: <http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html>.
- [4] Ábrahám Gábor, *Nevezetes egyenlőtlenségek*, MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged, 1995.
- [5] P. G. Doyle, J. L. Snell, *Random Walks and Electric Networks*, The Carus Mathematical Monographs, No. 22, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984. Elektronikus változat: <https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/>
- [6] KöMaL B. 4461. és A. 563. feladatok megoldása, *KöMaL*, 2012/5, 273–274. Elektronikus változat: <http://www.komal.hu/verse>
- [7] M. Levi, *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.
- [8] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Volume 1, Calendron Press, Oxford, 1873. Elektronikus változat: <https://archive.org/details/atreatiseonelec03maxwgoog>.
- [9] E. A. Milne, Note on Rosseland's integral for the stellar absorption coefficient, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **85** (1925), 979–984. Elektronikus változat: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/85/9/979.full.pdf>.
- [10] A. Witkowski, Proof Without Words: An Electrical Proof of the AM-HM Inequality, *Math. Mag.*, **87** (2014), 275. Elektronikus változat: <http://www.jstor.org/stable/10.4169/math.mag.87.4.275>.