[1]

Elméleti feladatok

1. feladat. A Napból érkező részecskék

A rész. A Naptól jövő sugárzás

A.1. A Stefan–Boltzmann-törvény alapján: $L_\odot = \left(4\pi R_\odot^2\right)\left(\sigma T_\odot^4\right)$. Innen:

$$T_\odot = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma}\right)^{1/4} = 5{,}76 \cdot 10^3 \text{ K}.$$

A.2.

$$P_{\mathrm{be}} = \int_0^\infty u(f)\,\mathrm{d}f = \int_0^\infty A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi h}{c^2} f^3 \exp\left(-hf/k_{\mathrm{B}}T_\odot\right)\,\mathrm{d}f.$$

Legyen $x = \dfrac{hf}{k_{\mathrm{B}}T_\odot}$. Ekkor $f = \dfrac{k_{\mathrm{B}}T_\odot}{h}x$ és $\mathrm{d}f = \dfrac{k_{\mathrm{B}}T_\odot}{h}\,\mathrm{d}x$. Ezzel:

$$P_{\mathrm{be}} = \frac{2\pi h A R_\odot^2}{c^2 d_\odot^2}\frac{\left(k_{\mathrm{B}}T_\odot\right)^4}{h^4}\int_0^\infty x^3 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\cdot 6 = \frac{12\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}.$$

Másik megoldás, amely *nem* használja a Wien-közelítést:

$$P_{\mathrm{be}} = \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2}A = \sigma T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} = \frac{2\pi^5 k_{\mathrm{B}}^4}{15c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}.$$

A.3.

$$n_\gamma(f) = \frac{u(f)}{hf} = A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi}{c^2}f^2\exp(-hf/k_{\mathrm{B}}T_\odot).$$

A.4. A hasznos kimenő teljesítményt az $E_{\mathrm{g}} = hf_{\mathrm{g}}$ egy fotonra jutó energiakvantum és az $E \geq E_{\mathrm{g}}$ energiájú fotonok számának szorzata adja:

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{ki}} &= hf_{\mathrm{g}}\int_{f_{\mathrm{g}}}^\infty n_\gamma(f)\,\mathrm{d}f = hf_{\mathrm{g}}A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi}{c^2}\int_{f_{\mathrm{g}}}^\infty f^2\exp(-hf/k_{\mathrm{B}}T_\odot)\,\mathrm{d}f = \\
&= k_{\mathrm{B}}T_\odot x_{\mathrm{g}} A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi}{c^2}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T_\odot}{h}\right)^3\int_{x_{\mathrm{g}}}^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}x_{\mathrm{g}}\left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.
\end{aligned}$$

A.5. A hatásfok:

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{ki}}}{P_{\mathrm{be}}} = \frac{x_{\mathrm{g}}}{6}\left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.$$

Ha P_{be}-re az A.2. másik eredményét használjuk, akkor a hatásfok:

$$\eta = \frac{2\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}\frac{1}{\sigma}x_{\mathrm{g}}\left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}} = \left(\frac{90}{\pi^4}\right)\frac{x_{\mathrm{g}}}{6}\left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.$$

A két eredmény közel van egymáshoz, mert $90/\pi^4 \approx 0{,}92 \approx 1$.

A.6.

$$\eta = \frac{1}{6}\left(x_{\mathrm{g}}^3 + 2x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}}\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.$$

A határokon érvényes értékek: $\eta(0) = 0$ és $\eta(\infty) = 0$.

Mivel a zárójelben levő polinom kizárólag pozitív együtthatókat tartalmaz, az monoton növekvő. Az exponenciális függvény monoton csökkenő, és a szorzatuknak valahol maximuma van.

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}} = \frac{1}{6}\left(-x_{\mathrm{g}}^3 + x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}},$$

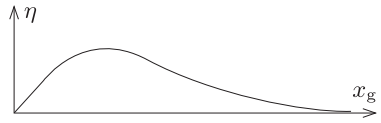
$$\left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}=0} = \frac{1}{3}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}\to\infty} = 0.$$

[1] Az elméleti feladatok szövegét a múlt havi számunkban közöltük.

Ha az A.2. másik eredményét használjuk, akkor:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_\mathrm{g}} = \frac{15}{\pi^4}\big(-x_\mathrm{g}^3 + x_\mathrm{g}^2 + 2x_\mathrm{g} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_\mathrm{g}},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_\mathrm{g}}\right|_{x_\mathrm{g}=0} = \frac{30}{\pi^4} \approx 0{,}31, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_\mathrm{g}}\right|_{x_\mathrm{g}\to\infty} = 0.$$



A.7. A maximális értéket ott veszi fel a függvény, ahol

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_\mathrm{g}} = \frac{1}{6}\big(-x_\mathrm{g}^3 + x_\mathrm{g}^2 + 2x_\mathrm{g} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_\mathrm{g}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x_\mathrm{g}) \equiv x_\mathrm{g}^3 - x_\mathrm{g}^2 - 2x_\mathrm{g} - 2 = 0.$$

Az egyenlet megoldásához használhatjuk például a felező módszert (más numerikus módszer is elfogadható):

$$\begin{aligned}
p(0) &= -2,\\
p(1) &= -4,\\
p(2) &= -2,\\
p(3) &= 10 \quad \Rightarrow \quad 2 < x_0 < 3,\\
p(2{,}5) &= 2{,}375 \quad \Rightarrow \quad 2 < x_0 < 2{,}5,\\
p(2{,}25) &= -0{,}171 \quad \Rightarrow \quad 2{,}25 < x_0 < 2{,}5.
\end{aligned}$$

A közelítő érték, ahol η-nak maximuma van: $x_0 = 2{,}27$. A maximum: $\eta(2{,}27) = 0{,}457$.

A.8. Az x_g értéke:

$$x_\mathrm{g} = \frac{1{,}11 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 5763} = 2{,}23,$$

amivel a hatásfok:

$$\eta_\mathrm{Si} = \frac{x_\mathrm{g}}{6}\big(x_\mathrm{g}^2 + 2x_\mathrm{g} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_\mathrm{g}} = 0{,}457.$$

Ha az A.2. másik eredményét használjuk, akkor:

$$\eta_\mathrm{Si} = \frac{15x_\mathrm{g}}{\pi^4}\big(x_\mathrm{g}^2 + 2x_\mathrm{g} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_\mathrm{g}} = 0{,}422.$$

A.9. A Nap teljes gravitációs potenciális energiája:

$$\Omega = -\int_0^{M_\odot} \frac{Gm\,\mathrm{d}m}{r}.$$

Az egyenletes tömegeloszlás miatt:

$$\varrho = \frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}, \qquad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho, \qquad \mathrm{d}m = 4\pi r^2 \varrho\,\mathrm{d}r.$$

Ezzel:

$$\Omega = -\int_0^{R_\odot} G\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho\right)\big(4\pi r^2 \varrho\big)\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{16\pi^2 G\varrho^2}{3}\frac{R_\odot^5}{5} = -\frac{3}{5}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot}.$$

A.10.

$$\tau_\mathrm{KH} = \frac{-\Omega}{L_\odot} = \frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot L_\odot} = 1{,}88 \cdot 10^7 \text{ év}.$$

B rész. A Napból jövő neutrínók

B.1. ΔE energia felszabadulása során két neutrínó keletkezik, így

$$\Phi_\nu = 2 \cdot \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2 \Delta E} = 2 \cdot \frac{3{,}85 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1{,}50 \cdot 10^{11})^2 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-12}} = 6{,}8 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-2}.$$

B.2. Legyen ε a neutrínó detektálásának hatásfoka, N_0 a bejövő részecskeszám. Ezzel:

$$\begin{aligned} N_1 &= \varepsilon N_0, \\ N_\mathrm{e} &= \varepsilon N_0(1-r), \\ N_\mathrm{x} &= \varepsilon N_0 r/6, \\ N_2 &= N_\mathrm{e} + N_\mathrm{x}. \end{aligned}$$

Tehát:

$$(1-r)N_1 + \frac{r}{6}N_1 = N_2,$$

innen a kérdezett hányados:

$$r = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right).$$

B.3. Amikor egy elektron már éppen nem bocsát ki Cserenkov-sugárzást, a sebessége $v_\mathrm{stop} = c/n$-re csökken. Az elektron teljes energiája ekkor:

$$E_\mathrm{stop} = \frac{m_\mathrm{e}c^2}{\sqrt{1 - v_\mathrm{stop}^2/c^2}} = \frac{nm_\mathrm{e}c^2}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Abban a pillanatban, miután a neutrínó kiütötte az elektront, az elektron energiája:

$$E_\mathrm{start} = \alpha\Delta t + \frac{nm_\mathrm{e}c^2}{\sqrt{n^2-1}}.$$

A kölcsönhatás előtt az elektron energiája $m_\mathrm{e}c^2$. Így a neutrínónak átadott energia:

$$E_\mathrm{átadott} = E_\mathrm{start} - m_\mathrm{e}c^2 = \alpha\Delta t + \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right) m_\mathrm{e}c^2.$$

B.4. A ^{7}Be atommagok mozgása miatt Doppler-effektus lép fel a neutrínókra. Mivel az energia relatív megváltozása kicsiny ($\Delta E_\mathrm{rms}/E_\nu \sim 10^{-4}$), a nemrelativisztikus Doppler-eltolódással lehet számolni (a relativisztikus számolás szinte azonos eredményt ad). A megfigyelés irányának a z irányt véve:

$$\frac{\Delta E_\mathrm{rms}}{E_\nu} = \frac{v_{z,\mathrm{rms}}}{c} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}V_\mathrm{Be}}{c} = 3{,}85 \cdot 10^{-4}.$$

Tehát a Be atommagok sebességének négyzetes középértéke:

$$V_\mathrm{Be} = \sqrt{3} \cdot 3{,}85 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}00 \cdot 10^8 \ \mathrm{ms}^{-1} = 2{,}01 \cdot 10^5 \ \mathrm{ms}^{-1}.$$

A Nap magjának átlagos hőmérséklete pedig:

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{Be}V_\mathrm{Be}^2 = \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T_\mathrm{c} \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{c} = 1{,}13 \cdot 10^7 \ \mathrm{K}.$$

2. feladat. A szélsőértékelv

A rész. Szélsőértékelv a mechanikában

A.1. A mechanikai energia megmaradása alapján:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_0, \quad \text{amiből} \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$$

A.2. A határfelületen csak az x irányú sebességkomponens változik (a határfelületen fellépő $-x$ irányú erőlökés hatására), az y irányú nem. Ezért

$$\begin{aligned} v_{1y} &= v_{2y}, \\ v_1 \sin\vartheta_1 &= v_2 \sin\vartheta_2. \end{aligned}$$

A.3. A hatás definíciójának megfelelően $A(w)$ az O és P rögzített pontok között:

$$A(w) = mv_1\sqrt{x_1^2 + w^2} + mv_2\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0^2 - w^2)}.$$

Az $A(w)$ hatás akkor lesz minimális, ha w szerinti deriváltja nulla:

$$\frac{v_1 w}{\sqrt{x_1^2+w^2}} - \frac{v_2(y_0-w)}{\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-w)^2}} = 0,$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0-w)\sqrt{x_1^2+w^2}}{w\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-w)^2}}.$$

Vegyük észre, hogy ez ugyanaz, mint az A.2.-ben megkapott $v_1 \sin\vartheta_1 = v_2 \sin\vartheta_2$ eredmény!

B rész. Szélsőértékelv az optikában

B.1. A fény sebessége az I-es közegben c/n_1, a II-es közegben c/n_2, ahol c a fénysebesség vákuumban. Legyen a két közeget elválasztó egyenes egyenlete $y = y_0$, a fénysugár pedig az $x = w$ helyen lépjen át egyik közegből a másikba. Az a $\tau(w)$ idő, amíg a fény a $(0;0)$ origóból a rögzített $(x_0;y_0)$ pontba jut:

$$\tau(w) = \frac{n_1}{c}\sqrt{y_1^2+w^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x_0-w)^2+(y_0-y_1)^2}.$$

A szélsőértéket A.3.-hoz hasonlóan deriválással határozhatjuk meg:

$$\frac{n_1 w}{\sqrt{y_1^2+w^2}} - \frac{n_2(y_0-w)}{\sqrt{(x_0-w)^2+(y_0-y_1)^2}} = 0,$$

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2.$$

Ez a Snellius–Descartes-törvény.

B.2. A Snellius–Descartes-törvény alapján $n_0 \sin\alpha_0 = n(y)\sin\alpha$. Ezen kívül felhasználva, hogy $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg}\alpha$ és $\sin\alpha = 1/\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$:

$$n_0 \sin\alpha_0 = \frac{n(y)}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{\left(\frac{n(y)}{n_0\sin\alpha_0}\right)^2 - 1}.$$

B.3. A B.2. eredményből a változókat szétválasztva és mindkét oldalt integrálva:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{n_0-ky}{n_0}\right)^2-1}} = -\int \mathrm{d}x.$$

(Felhasználtuk, hogy $\alpha_0 = 90°$ és így $\sin\alpha_0 = 1$.) Használjuk a $\xi = (n_0-ky)/n_0$ helyettesítést, így:

$$\int \frac{\mathrm{d}\xi\left(-\frac{n_0}{k}\right)}{\sqrt{\xi^2-1}} = -\int \mathrm{d}x, \qquad -\frac{n_0}{k}\ln\left(\frac{n_0-ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0-ky}{n_0}\right)^2-1}\right) = -x+c.$$

Figyelembe véve az $x = 0$ és $y = 0$ kezdeti feltételeket $c = 0$. Ebből a pálya egyenlete:

$$x = \frac{n_0}{k}\ln\left[\left(\frac{n_0-ky}{n_0}\right) + \sqrt{\left(\frac{n_0-ky}{n_0}\right)^2-1}\right].$$

B.4. Felhasználva a megadott adatokat ($y_0 = 10{,}0$ cm, $n_0 = 1{,}50$, $k = 0{,}050$ cm^{-1}) a B.3. végeredményébe behelyettesítve ($y = -y_0$):

$$x_0 = \frac{n_0}{k}\ln\left[\left(\frac{n_0+ky_0}{n_0}\right) + \sqrt{\left(\frac{n_0+ky_0}{n_0}\right)^2-1}\right] = 24{,}0 \text{ cm}.$$

C rész. A szélsőértékelv és az anyag hullámtermészete

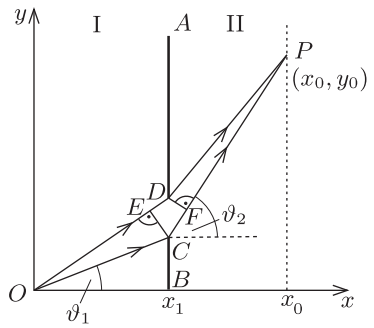
C.1. A részecske de Broglie-hullámhossza $\lambda = \dfrac{h}{mv}$, amiből a keresett fáziskülönbség (a hatás $\Delta A = mv\Delta s$ definícióját felhasználva):

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s = \frac{2\pi}{h}mv\Delta s = \frac{2\pi\Delta A}{h}.$$

C.2. Tanulmányozzuk az OCP és ODP pályákat! A geometriai útkülönbség az I-es tartományban ED, a II-es tartományban CF. Ebből $d \ll x_0 - x_1$ és $d \ll x_1$ felhasználásával

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{CD} &= \frac{2\pi d \sin\vartheta_1}{\lambda_1} - \frac{2\pi d \sin\vartheta_2}{\lambda_2} = \\ &= \frac{2\pi m v_1 d \sin\vartheta_1}{h} - \frac{2\pi m v_2 d \sin\vartheta_2}{h} = \\ &= 2\pi \frac{md}{h}(v_1 \sin\vartheta_1 - v_2 \sin\vartheta_2) = 0\end{aligned}$$

(A.2. vagy B.1. alapján). Ez az eredmény várható, hiszen a klasszikus pálya közelében erősítésnek kell lennie.



D rész. Anyaghullámok interferenciája

D.1. Az energiák alapján

$$qU_1 = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{amiből} \quad U_1 = \frac{mv^2}{2q} = 1{,}139 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

D.2. A fáziskülönbség P-ben:

$$\Delta\varphi_{\mathrm{P}} = \frac{2\pi d \sin\vartheta}{\lambda_1} - \frac{2\pi d \sin\vartheta}{\lambda_2} = 2\pi(v_1 - v_2)\frac{md}{h}\sin\vartheta = 2\pi\beta,$$

amiből

$$\beta = 5{,}13.$$

D.3. Az előző rész alapján látható, hogy a legközelebbi olyan helyen, ahol nem várható elektronbecsapódás (kioltás van) $\Delta\varphi = 5{,}5 \cdot 2\pi$. Ez alapján:

$$\frac{mv_1 d \sin\vartheta}{h} - \frac{mv_2 d \sin(\vartheta + \Delta\vartheta)}{h} = 5{,}5;$$

$$\sin(\vartheta + \Delta\vartheta) = \frac{\frac{mv_1 d \sin\vartheta}{h} - 5{,}5}{\frac{mv_2 d}{h}} = \frac{v_1}{v_2}\sin\vartheta - \frac{5{,}5\,h}{mv_2 d} = 0{,}173\,586,$$

$$\Delta\vartheta = -0{,}0036^\circ,$$

amiből a P-hez legközelebbi hely távolsága:

$$\Delta y = (x_0 - x_1)\big[\operatorname{tg}(\vartheta + \Delta\vartheta) - \operatorname{tg}\vartheta\big] = -16{,}2\ \mu\text{m}.$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy ez a pont P alatt van.

D.4. Az I fluxussűrűség az elektronok v sebességének és N/V sűrűségének szorzata. Ez alapján:

$$N = \frac{I_{\min} V}{v} = 1, \quad \text{amiből} \quad I_{\min} = \frac{v}{V} = \frac{v}{Al} = 4 \cdot 10^{19}\ \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}.$$

3. feladat. Nukleáris reaktor tervezése

A rész. Az üzemanyagrúd

A.1. A magreakció során felszabaduló energiát a tömegdefektusból számolhatjuk:

$$\Delta E = \left[m\left({}^{235}\mathrm{U}\right) + m\left({}^{1}\mathrm{n}\right) - m\left({}^{94}\mathrm{Zr}\right) - m\left({}^{140}\mathrm{Ce}\right) - 2m\left({}^{1}\mathrm{n}\right)\right] c^2.$$

Összevonás után, a tömegek felhasználásával kapjuk:

$$\Delta E = \left[m\left(^{235}\mathrm{U}\right) - m\left(^{94}\mathrm{Zr}\right) - m\left(^{140}\mathrm{Ce}\right) - m\left(^{1}\mathrm{n}\right)\right] c^2 = 208{,}7\ \mathrm{MeV}.$$

A.2. Az U_2O (feladatban megadott) sűrűsége a térfogategységre eső molekulák össztömegét jelenti, így ezt elosztva a moláris tömeggel, majd megszorozva az N_A Avogadro-állandóval, megkapjuk az 1 m^3-nyi anyagban található U_2O-molekulák N_1 számát:

$$N_1 = \frac{\varrho N_\mathrm{A}}{M} = 2{,}364 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Az urán-dioxid molekuláknak azonban csak 0,72%-a tartalmazza a 235-ös uránizotópot, így a feladat kérdésére a válasz:

$$N = 0{,}0072 \cdot N_1 = 1{,}702 \cdot 10^{26}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

A.3. Az üzemanyagrúd egységnyi térfogatában N hasadó uránatom van, ezek teljes hatáskeresztmetszete $N\sigma_f$. Ha ezt megszorozzuk a φ neutronfluxussal, az időegység alatt (köbméterenként) bekövetkező hasadások számát kapjuk: $\varphi N \sigma_f$. Minden magreakcióban az A.1. részben kiszámolt ΔE energia szabadul fel, melynek 80%-a alakul hővé, így a hőfejlődés Q üteme:

$$Q = 0{,}8\, \varphi N \sigma_f \Delta E = 4{,}92 \cdot 10^8\ \mathrm{W/m^3}.$$

A.4. A $T_\mathrm{c} - T_\mathrm{s}$ hőmérsékletkülönbség K dimenziójú, így az $F(Q, a, \lambda)$ mennyiség mértékegysége is kelvin kell hogy legyen. Keressük az ismeretlen függvényt $F(Q, a, \lambda) = Q^\alpha a^\beta \lambda^\gamma$ alakban, és vizsgáljuk meg, mekkorának kell választanunk az α, β, γ számokat, hogy kelvin dimenziójú mennyiséget kapjunk. A jobb oldalon szereplő mennyiségek mértékegysége:

$$[Q] = \mathrm{W\ m^{-3}} = \mathrm{kg\ s^{-3}\ m^{-1}}, \quad [a] = \mathrm{m}, \quad [\lambda] = \mathrm{W\ m^{-1}\ K^{-1}} = \mathrm{kg\ s^{-3}\ m\ K^{-1}}.$$

Ezek felhasználásával az alábbi egyenletet kapjuk a kitevőkre:

$$\mathrm{K} = \left(\mathrm{kg\ s^{-3}\ m^{-1}}\right)^\alpha \mathrm{m}^\beta \left(\mathrm{kg\ s^{-3}\ m\ K^{-1}}\right)^\gamma,$$

amiből $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$ adódik. Tehát az üzemanyagrúd közepének és felületének hőmérsékletkülönbségét megadó formula (a feladatban megadott 1/4-es faktort is visszaírva)[2]:

$$T_\mathrm{c} - T_\mathrm{s} = \frac{Qa^2}{4\lambda}.$$

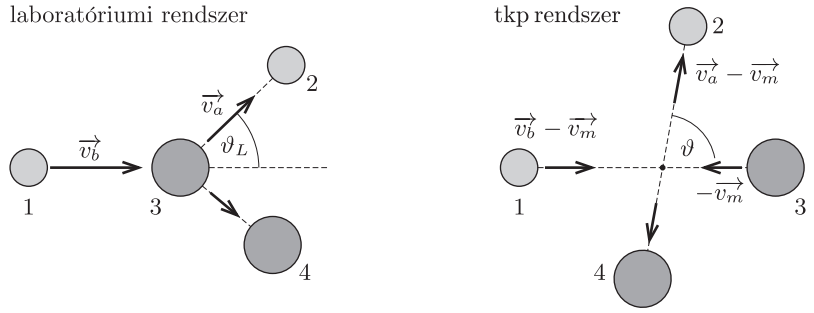
A.5. Az üzemanyagrúd közepének a hőmérséklete nem érheti el az U_2O olvadási hőmérsékletét, míg a külső felületének hőmérséklete a hűtőközeg hőmérsékletével egyezik meg. Így az A.4. részfeladatban kapott összefüggés szerint az üzemanyagrúd sugarának lehetséges legnagyobb a_u értéke

$$a_\mathrm{u} = \sqrt{\frac{4\lambda(T_\mathrm{c} - T_\mathrm{s})}{Q}},$$

ahol most $T_\mathrm{c} = T_\mathrm{olv} = 3138$ K, $T_\mathrm{s} = 577$ K. A megadott adatokat és Q fentebb kiszámolt értékét behelyettesítve $a_\mathrm{u} = 8{,}27 \cdot 10^{-3}$ m.

B rész. A moderátor

B.1. Az *ábrán* láthatóak a sebességviszonyok a tömegközépponti koordináta-rendszerben. Fontos megjegyezni, hogy a ϑ szög nagyobb, mint ϑ_L.



[2] A dimenzióanalízis módszere egy dimenziótlan szorzótényező erejéig határozatlanul hagyja a megoldást. A helyzetet az tette volna egyértelművé, ha a feladat szövegében megadják, hogy a fizikai mennyiségek hatványainak szorzata előtt álló állandó számértéke éppen 1/4 (– a szerk.).

B.2. A tömegközéppont sebessége a rendszer impulzusának és a teljes tömegének hányadosa:

$$v_m = \frac{v_b}{A+1}.$$

Ugyanekkora sebességgel mozog a tkp rendszerből nézve a laboratóriumi rendszerben kezdetben álló moderátoratom is:

$$V = \frac{v_b}{A+1}.$$

A neutron sebességének nagysága az ütközés előtt a tkp rendszerben:

$$v = v_b - v_m = \frac{A}{A+1} v_b.$$

A tkp rendszerben a rugalmas ütközés során az energia- és impulzusmegmaradás úgy teljesül, hogy a neutron és a moderátoratom is megőrzi az ütközés előtti sebességének nagyságát (rendre v és V), csupán a sebesség iránya változik meg.

B.3. Ütközés után a neutron sebességvektora a laboratóriumi rendszerben $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_m}$, így a sebességnégyzetének nagysága (a vektorháromszögben felírható koszinusztételből):

$$v_a^2 = v^2 + v_m^2 + 2 v v_m \cos\vartheta.$$

Behelyettesítve v és v_m előző részfeladatban kiszámolt értékét:

$$v_a^2 = \frac{A^2 v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{2A v_b^2}{(A+1)^2}\cos\vartheta,$$

amiből

$$G(\alpha,\vartheta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{A^2 + 2A\cos\vartheta + 1}{(A+1)^2}.$$

Ez kis átalakítással felírható α segítségével is:

$$G(\alpha,\vartheta) = \frac{A^2+1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2}\cos\vartheta = \frac{1}{2}\big[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\vartheta\big].$$

B.4. Az energiaveszteség akkor a legnagyobb, ha a $G(\alpha,\vartheta)$ mennyiség a lehető legkisebb. Ez (akár intuícióval, akár az előző részben kapott kifejezést vizsgálva) akkor következik be, ha $\vartheta = 180^\circ = \pi$, azaz ha az ütközés lineáris. Ekkor $G(\alpha,\pi) = \alpha$, a legnagyobb relatív energiaveszteség pedig

$$f_l = \left(\frac{E_b - E_a}{E_b}\right)_{\max} = 1 - G(\alpha,\pi) = 1 - \alpha.$$

Most $\alpha = (19/21)^2$, így $f_l \approx 0{,}181$.

C rész. A nukleáris reaktor

C.1. A reaktor térfogata adott: $V = \pi R^2 H$. Kérdés, hogyan kell megválasztani az $R : H$ arányt, hogy az elszökő neutronfluxusban szereplő

$$x = \left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

kifejezés minimális legyen. Fejezzük ki R^2 értékét a térfogattal:

$$x = \frac{2{,}405^2 \pi H}{V} + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2.$$

Bontsuk az első tagot két egyenlő kifejezés összegére, majd alkalmazzuk a számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget:

$$x = \frac{2{,}405^2\pi H}{2V} + \frac{2{,}405^2\pi H}{2V} + \frac{\pi^2}{H^2} \geq \sqrt[3]{\frac{2{,}405^2\pi H}{2V}\cdot\frac{2{,}405^2\pi H}{2V}\cdot\frac{\pi^2}{H^2}}.$$

A jobb oldalon láthatóan kiesik H, így egy konstans értéket kapunk. Ezt a bal oldali kifejezés akkor veszi fel, ha a benne szereplő három tag értéke megegyezik, azaz

$$\frac{2{,}405^2}{2R^2} = \frac{\pi^2}{H^2}, \quad \text{valamint} \quad x = \frac{3\pi^2}{H^2}.$$

Használjuk még fel, hogy stacionárius állapotban az időegység alatt kiszökő és a láncreakcióban termelődő (többlet)neutronok száma megegyezik, vagyis $k_1 x\psi = k_2\psi$, amiből

$$H = \sqrt{\frac{3\pi^2}{x}} = \sqrt{\frac{3\pi^2 k_1}{k_2}} \approx 5{,}87 \text{ m}, \quad \text{és} \quad R = \frac{2{,}405H}{\sqrt{2}\pi} \approx 3{,}175 \text{ m}.$$

C.2. A $d = 0{,}287$ m oldalélű négyzetrácsba rendezett üzemanyag-kazetták mindegyikére d^2 nagyságú keresztmetszetterület jut a reaktorban. Mivel a reaktor teljes keresztmetszete πR^2 (ahol R az előző feladatrészben meghatározott érték), így a reaktorban elférő kazetták száma legfeljebb

$$F_n = \frac{\pi R^2}{d^2} \approx 387.$$

Egyetlen (henger alakú) fűtőkazetta térfogata $\pi r_{\text{kazetta}} H$ (ahol $r_{\text{kazetta}} = 3{,}617 \cdot 10^{-2}$ m), sűrűsége adott ($\varrho = 1{,}060$ kg m^{-3}), így a fűtőelemek össztömege

$$M = F_n \pi r_{\text{kazetta}} H \varrho \approx 9{,}90 \cdot 10^4 \text{ kg}.$$

Kísérleti feladatok

A Fény Nemzetközi Évéhez igazodva a kísérleti fordulóban optikai mérési feladatok voltak. Mindkét mérésben fényelhajlás (diffrakció) segítségével kellett tanulmányozni különböző struktúrákat, így a két feladathoz a (nagyon igényesen elkészített) mérési eszközök részben azonosak voltak. Emiatt a feladatokat csak meghatározott sorrendben lehetett elvégezni.

1. feladat: Diffrakció csavarvonal alakú szerkezeteken

A DNS kettős spirál alakjának felfedezését egy, a DNS molekuláról készült röntgendiffrakciós kép alapozta meg. A mérési feladatban ehhez hasonlóan diffrakció segítségével kellett csavarvonal alakú szerkezetek geometriai paramétereit meghatározni.

A mérési berendezés lézermodulból, mintatartóból, tükrökből (ezek segítségével a szűk helyen meghosszabbítható a fényút) és ernyőből állt, melyeket a mérés előtt gondosan be kellett állítani. A diffrakciós képen kialakuló kioltási helyek távolságát digitális tolómérővel lehetett leolvasni.

A feladat első felében egy nagyon vékony huzalból készült, apró csavarrugó volt a vizsgálat tárgya. A meghatározandó mennyiségek: a csavarrugó R sugara, P menetemelkedése és a rugót alkotó drót a átmérője. Merőleges irányból nézve a rugó vetülete egy cikkcakkvonal, amely egyenértékű két olyan, egymással 2α szöget bezáró drótsorozattal, melyek párhuzamos helyzetű, egyforma vastagságú, egymástól d távolságra lévő drótszakaszokból állnak.

Az elmélet szerint egy a átmérőjű huzalon kialakuló diffrakciós kép intenzitáseloszlása (a ϑ diffrakciós szög függvényében):

$$I(\vartheta) = I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \qquad \text{ahol} \qquad \beta = \frac{\pi a \sin\vartheta}{\lambda}.$$

A középső folt ($\beta = \vartheta = 0$) fényes, a többi olyan irányban, amelyre $\sin\beta = 0$ (de $\beta \neq 0$) az intenzitás zérus, kioltás lesz. Ez alapján az intenzitáseloszlás n-edik minimumának ϑ_n szöge:

$$\sin\vartheta_n = \pm n\frac{\lambda}{a}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Két párhuzamos, egymástól d távolságra lévő, ugyanolyan vastag dróton kialakuló diffrakciós kép két mintázat kombinációja (az egyetlen dróton való elhajlás és a két drót között kialakuló interferencia miatt). A kialakuló intenzitáseloszlás:

$$I(\vartheta) = I(0)\cos^2\delta\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \qquad \text{ahol} \qquad \delta = \frac{\pi d \sin\vartheta}{\lambda} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{\pi a \sin\vartheta}{\lambda}.$$

Az ernyőn a két, 2α szöget bezáró drótsorozat két, 2α szöget bezáró diffrakciós képet hozott létre, ebből α leolvasható volt. Mindkét diffrakciós képen megtalálhatóak voltak a drót átmérőjének és a drótok távolságának megfelelő kioltási helyek. Az előző összefüggés alapján is lehetett látni, hogy a diffrakciós képen a finom (apróbb) struktúrákhoz tartoznak a nagyobb távolságok és a durvább (nagyobb) méretekhez a kisebb távolságok. A leolvasott távolságokból grafikus ábrázolás és egyenesillesztés segítségével az a drótátmérőt és a d távolságot meg lehetett határozni, ezekből pedig a csavarvonal R sugarát és P menetemelkedését ki lehetett számítani. A (szabad szemmel alig látható) rugó drótátmérője $a = 0{,}15$ mm, sugara $R = 0{,}75$ mm, menetemelkedése $P = 0{,}9$ mm volt.

A feladat második felében egy, a DNS kettős spirálját modellező síkbeli struktúrát kellett vizsgálni. Itt az előző rész két jellemző távolsága (a és d) mellett egy harmadik (közepes) távolság is megjelenik, és így a diffrakciós képen is háromféle távolságot kellet felismerni és megmérni.

2. feladat: Diffrakció vízfelszínen kialakuló kapilláris hullámokon

A folyadékok felszínén kialakuló és terjedő hullámok viselkedését két erő, a nehézségi erő és a felületi feszültségből származó erő határozza meg. Ha a hullámhossz kisebb egy λ_{kr} kritikus hullámhossznál, akkor a nehézségi erő hatása elhanyagolható, ezek az ún. kapilláris hullámok. ($\lambda_{\mathrm{kr}} = 2\pi\sqrt{\sigma/\rho g}$, ahol σ a folyadék felületi feszültsége, ρ a folyadék sűrűsége, g pedig a nehézségi gyorsulás. A mérési feladatban kialakuló hullámok hullámhossza sokkal kisebb a kritikus hullámhossznál.) A kapillárishullámok a folyadék viszkozitása miatt csillapodnak. A mérési feladatban egy vízminta felületi feszültségét és viszkozitását kellett meghatározni a kapilláris hullámokon létrejövő fényelhajlás alapján.

A kapilláris hullámok hullámhossza a fény hullámhosszához képest aránylag nagy, ezért jól mérhető diffrakcióhoz a fénynek lapos szögben kell esnie a folyadék felületére. (A diffrakciós maximumok távolságának mérése így is nehéz.) A feladat szövegében megadták a laposszögű diffrakció összefüggéseit:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_l} \sin\vartheta \sin\gamma,$$

ahol $k = 2\pi/\lambda_f$ a kapilláris hullámok hullámszáma, λ_l és λ_f a lézerfény, illetve a felületi hullám hullámhossza, ϑ a lézerfény vízszintessel bezárt szöge és γ a diffrakciós képen a központi maximum és az elsőrendű maximum közötti szögtávolság.

A folyadék felszínén a kapilláris hullámokat egy $\omega = 2\pi f$ körfrekvenciájú rezgéskeltő hozza létre. A hullám körfrekvenciájának és hullámszámának kapcsolata a diszperziós reláció:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} k^q},$$

ahol q egy, a mérés során meghatározandó egész szám (elméleti értéke 3).

A gondos beállítás és a fénysugár szögének megmérése után a különböző frekvenciájú hullámokat egy tablettel vezérelt rezgéskeltővel hozták létre a versenyzők. A diffrakciós maximumok távolságát az ernyő helyére szerelt digitális tolómérőhöz rögzített fotodetektorral mérték, ebből határozták meg a kapillárishullámok hullámszámát. Az $\ln\omega$-$\ln k$ grafikonból leolvasható a diszperziós relációban szereplő q állandó és (ρ ismeretében) a víz σ felületi feszültsége.

A feladat második felében a hullámok csillapítását kellett tanulmányozni. A hullámok h amplitúdója a hullámkeltőtől s távolságra: $h = h_0 e^{-\delta s}$, ahol h_0 az amplitúdó a hullámkeltőnél, δ a csillapítási tényező. A tapasztalat szerint h_0 arányos a rezgéskeltőre kapcsolt feszültség effektív értékének 0,4-edik hatványával, a csillapítási tényező és a folyadék η viszkozitásának kapcsolata:

$$\delta = \frac{8\pi\eta f}{3\sigma}.$$

A mérés során a versenyzők változtatták a hullámkeltő távolságát a fény beesési helyétől, és mérték, hogy a rezgéskeltőre mekkora feszültséget kell kapcsolni ahhoz, hogy a diffrakciós maximum intenzitása (amit a fotodetektor mér) állandó maradjon. A mérési adatokból – megfelelő grafikon megrajzolásával és egyenesillesztéssel – a vízminta viszkozitása meghatározható volt.