

I. rész

1. Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós számpár, amelyre

$$\left. \begin{aligned} (x^2 + 5)^2 &= 25 - |y - 3| \\ 21x + 63y &= 188 \end{aligned} \right\}.$$

(11 pont)

Megoldás. Az első egyenletből: $(x^2 + 5)^2 \geq 25$, $25 - |y - 3| \leq 25$. Így az első egyenlet megoldása csak $x = 0$, $y = 3$ lehet. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve:

$$21 \cdot 0 + 63 \cdot 3 = 189 \neq 188.$$

Az egyenletrendszernek tehát nincs megoldása.

2. Egy óra számlapja 20 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög. A mutatókat a háromszög középpontjában rögzítették úgy, hogy 12 órakor az egyik csúcs felé mutatnak.

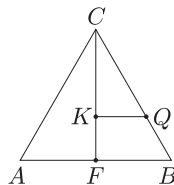
a) Milyen hosszú lehet a nagymutató, ha soha nem nyúlik túl az óra számlapján?

b) Három órakor a két mutató által meghatározott két félegyenes mekkora területű részt jelöl ki az óra számlapjából? (12 pont)

Megoldás. a) A nagymutató nem lehet hosszabb a 20 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög beírt körének sugaránál. Mivel az a oldalú szabályos háromszög területe: $t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a kerülete: $k = 3a$, most $t = 100\sqrt{3}$ cm², $k = 60$ cm. A $t = rs$ (r a beírt kör sugara, s a kerület fele) összefüggés szerint:

$$r = \frac{100\sqrt{3}}{30} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

A nagymutató nem lehet hosszabb $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm-nél.



b) A mutatók által kijelölt CKQ derékszögű háromszög hasonló a CFB derékszögű háromszöghöz (a szögek páronként egyenlők). Az ABC szabályos háromszögben a K pont egyben a súlypont is, így $CK : CF = 2 : 3$. Ez lesz a két háromszög hasonlóságának aránya is.

Tudjuk, hogy a területek a hasonlóság arányának négyzetével arányosak, ezért

$$t_{CKQ} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot t_{CFB} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{200\sqrt{3}}{9} \approx 38,5 \quad (\text{cm}^2).$$

Három órakor a két mutató által meghatározott két félegyenes $38,5$ cm² területű részt jelöl ki az óra számlapjából.

3. Egy egyfordulós röplabdakupán – ahol tehát bármely két csapat pontosan egyszer játszik egymással – 30 lejátszott mérkőzés után még minden csapatnak három mérkőzése volt hátra. Hány csapat szerepelt a kupán? (14 pont)

Megoldás. Legyen a csapatok száma n . Az összes mérkőzések száma: $\frac{n(n-1)}{2}$. Minden csapatnak még 3 mérkőzése volt hátra, ez összesen $\frac{3n}{2}$ mérkőzés. Ezért a lejátszott mérkőzések száma:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{3n}{2} = 30,$$

amiből az $n^2 - 4n - 60 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. A gyökök: $n_1 = 10$, $n_2 = -6$. A röplabdakupán 10 csapat vett részt.

4. Határozzuk meg az $A \cap B$ halmazt, ha $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3(\text{ctg } x - \text{tg } x) = 2\sqrt{3}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$. (14 pont)

Megoldás. Megoldjuk a $3(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{3}$ egyenletet. Ez

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

alakra rendezhető, amiből $\operatorname{tg} x$ lehetséges értékei: $\frac{\sqrt{3}}{3}$ vagy $-\sqrt{3}$. Vagyis

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k_1\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + k_2\pi, \quad \text{ahol } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Az $|x| \leq 2$ feltétel szerint $-2 \leq x \leq 2$.

Vagyis

$$A \cap B = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6} \right\}.$$

II. rész

5. A $10^n + 14^n + 15^n + 21^n$ kifejezésben az n 3-mal osztható pozitív páratlan egész számot jelöl.

a) Igazoljuk, hogy a négytagú összeg minden ilyen n esetén osztható lesz 1260-nal.

b) A négytagú összeg két tagját véletlenszerűen kiválasztjuk. Mekkora valószínűséggel lesz a két tag összege hárommal osztható? (16 pont)

Megoldás. a) Alakítsuk át a négytagú kifejezést:

$$10^n + 14^n + 15^n + 21^n = 2^n \cdot 5^n + 2^n \cdot 7^n + 3^n \cdot 5^n + 3^n \cdot 7^n = (2^n + 3^n)(5^n + 7^n).$$

Legyen $n = 3k$, ahol k páratlan pozitív egész számot jelöl. Ekkor

$$(2^n + 3^n)(5^n + 7^n) = (2^{3k} + 3^{3k})(5^{3k} + 7^{3k}) = (8^k + 27^k)(125^k + 343^k).$$

Mivel a kitevők páratlan számok, azért $35 \mid 8^k + 27^k$ és $468 \mid 125^k + 343^k$. A 468 osztható 36-tal, és $(35; 36) = 1$, ezért a kifejezés osztható $35 \cdot 36 = 1260$ -nal.

b) A négytagú összeg két tagját hatféleképpen választhatjuk ki. Mivel a kitevők páratlan számok, azért az összeg osztható lesz az alapok összegével. Az alapok összege a következő hat érték közül kerülhet ki: 24, 25, 31, 29, 35, 36. Ezek közül két szám osztható hárommal, vagyis két esetben biztosan 3-mal osztható az összeg. A további négy esetben nem kaphatunk 3-mal osztható számot, mert a kéttagú összeg egyik tagja osztható 3-mal, a másik pedig nem. Így a keresett valószínűség $\frac{1}{3}$.

6. Egy háromszögben ismerjük mindhárom oldal hosszát és mindhárom szög nagyságát. Mutassuk meg, hogy ezeket az értékeket az

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma}$$

képletbe behelyettesítve a háromszög területét kapjuk.

(16 pont)

Megoldás. A megadott képletet alakítsuk a következő módon:

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right)}.$$

A koszinusz-tételt alkalmazva: $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Ugyanígy felírhatjuk $\cos \beta$ és $\cos \gamma$ értékét is:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Vagyis:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right)} &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\sin \alpha} + \frac{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{\sin \beta} + \frac{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{\sin \gamma} \right)} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin \alpha} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac \sin \beta} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab \sin \gamma} \right)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4t} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4t} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4t} \right)} = \\ &= \frac{t(a^2 + b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2)} = \frac{t(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = t. \end{aligned}$$

Valóban a háromszög területét adja ez a képlet.

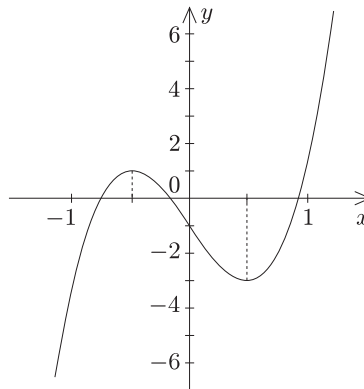
7. Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ hozzárendeléssel megadott függvénynek három különböző zérushelye van és ezek közül a legnagyobb: $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$. (16 pont)

Megoldás. Tudjuk, hogy $f(x)$ mindenütt folytonos függvény. Mivel az

$$f'(x) = 24x^2 - 6$$

függvény zérushelyei a $-\frac{1}{2}$ és az $\frac{1}{2}$, azért itt lehet az eredeti függvénynek lokális szélsőértéke. Ezeken a helyeken az első derivált előjelet vált (pozitívból negatívba, illetve negatívból pozitívba megy át), így az első helyen lokális maximuma, a második helyen lokális minimuma van a függvénynek. Számolással kapjuk, hogy $f(-0,5) = 1$ és $f(0,5) = -3$. Vagyis a $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ intervallumon van zérushelye a függvénynek.

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x$
f	$\nearrow$	maximum	$\searrow$	minimum	$\nearrow$
f'	+	0	-	0	+



Mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} (8x^3 - 6x - 1) = \infty$, azért az $]\frac{1}{2}; \infty[$ intervallumon is van zérushelye a függvénynek.

Mivel $\lim_{x \rightarrow -\infty} (8x^3 - 6x - 1) = -\infty$, azért a $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ intervallumon is van zérushelye a függvénynek.

Azaz van három különböző zérushelye.

Mivel $f(0) = -1$, azért a középső zérushelyről az is megállapítható, hogy a $]-\frac{1}{2}; 0[$ intervallumon található. Ez azt jelenti, hogy két negatív és egy pozitív zérushellyel rendelkezik a függvény. Tudjuk, hogy $\cos \frac{\pi}{9} > 0$, ezért ha az $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$ valóban zérushelye a függvénynek, akkor az a három zérushely közül csakis a legnagyobb lehet.

A $\frac{\pi}{9}$ háromszorosa $\frac{\pi}{3}$, ami nevezetes szög. Tudjuk, hogy $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Alkalmazzuk a $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ összefüggést:

$$\cos \frac{\pi}{3} = 4\cos^3 \frac{\pi}{9} - 3\cos \frac{\pi}{9}.$$

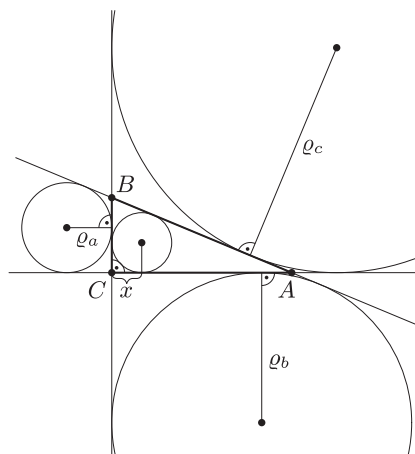
Ezt 2-vel szorozva és rendezve kapjuk:

$$8\cos^3 \frac{\pi}{9} - 6\cos \frac{\pi}{9} - 1 = 0.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ hozzárendelésű függvénynek az $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$ a zérushelye.

8. Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara 2, a befogókhoz hozzáírt köreinek sugara 3 és 10. Mekkora az átfogóhoz hozzáírt kör sugara? (16 pont)

Megoldás. Ha elkészítjük az ábrát (és a szokásos jelöléseket használjuk), akkor könnyen igazolható, hogy $\varrho_a = s - b$ és $\varrho_b = s - a$. A két összefüggés összeadásával kapjuk, hogy $\varrho_a + \varrho_b = c$. A megadott adatok szerint: $c = 13$.



Derékszögű háromszög esetén $\rho_c = s$.

Ha a háromszög beírt körének a BC oldallal vett érintési pontja és a B csúcs közti távolság x , akkor: $(x+2)^2 + (15-x)^2 = 169$, amiből $x^2 - 13x + 30 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 3$. Innen $a = 5$, $b = 12$.

A derékszögű háromszög mindhárom oldalát ismerve az átfogóhoz hozzáírt kör sugarát kiszámolhatjuk: $\rho_c = s = \frac{5+12+13}{2} = 15$.

Megjegyzés. Általában is megmutathatjuk, hogy derékszögű háromszög esetén: $\rho_a + \rho_b + \rho = \rho_c$.

9. Egy pihenőpark használatáért az üzemeltető pénzt szeretne kapni, ezért két lehetőséget dolgoztatott ki. Az első változat szerint lenne 12 órás és 6 órás jegy. A 12 órás jeggyel nyitástól zárásig bent lehet lenni 1000 Ft-ért, a 6 órás jegy ára pedig 600 Ft lenne. A második változat szerint lenne 3 órás jegy 350 Ft-ért, 6 órás jegy 600 Ft-ért, 9 órás jegy 850 Ft-ért és az ezt meghaladó időre szóló jegy 1250 Ft-ért. Megfigyeltek 150 látogatót és a következő gyakoriság adódott:

időtartam (h)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
gyakoriság (fő)	6	7	11	18	25	26	20	16	15	4	2	0

- a) Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel az első változat szerint?
b) Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel a második változat szerint?
c) Egy harmadik változatban 4, 8 és 12 órás jegyeket lehetne vásárolni, melyek ára arányos lenne az időtartammal. Milyen áron kellene adni ezeket a jegyeket, ha a rendelkezésre álló adatok alapján az egy főre eső átlagos bevételként 700 Ft körüli értéket szeretne kapni az üzemeltető és a jegyek ára 10-zel osztható? (16 pont)

Megoldás. a) Az első változat szerint $20 + 16 + 15 + 4 + 2 + 0 = 57$ fő 1000 Ft-os jegyet, és $150 - 57 = 93$ fő 600 Ft-os jegyet vásárolna.

Ekkor az egy főre eső átlagos bevétel:

$$\frac{57 \cdot 1000 + 93 \cdot 600}{150} = 752 \left(\frac{\text{Ft}}{\text{fő}} \right).$$

b) A második változat szerint $4 + 2 + 0 = 6$ fő 1250 Ft-os jegyet, $20 + 16 + 15 = 51$ fő 850 Ft-os jegyet, $18 + 25 + 26 = 69$ fő 600 Ft-os jegyet és $6 + 7 + 11 = 24$ fő 350 Ft-os jegyet vásárolna. Ekkor az egy főre eső átlagos bevétel:

$$\frac{24 \cdot 350 + 69 \cdot 600 + 51 \cdot 850 + 6 \cdot 1250}{150} = 671 \left(\frac{\text{Ft}}{\text{fő}} \right).$$

c) Legyen a 4 órás jegy ára x Ft, ekkor a 8 órásé $2x$ Ft, a 12 órásé $3x$ Ft. A megadott adatok alapján $15 + 4 + 2 + 0 = 21$ fő $3x$ Ft-os jegyet, $25 + 26 + 20 + 16 = 87$ fő $2x$ Ft-os jegyet és $6 + 7 + 11 + 18 = 42$ fő x Ft-os jegyet vásárolna. Ekkor az egy főre eső átlagos bevétel:

$$\frac{42 \cdot x + 87 \cdot 2x + 21 \cdot 3x}{150} = \frac{279x}{150} \left(\frac{\text{Ft}}{\text{fő}} \right).$$

Azt szeretnénk, hogy ez a szám 700 körüli érték legyen, vagyis $\frac{279x}{150} = 700$, amiből $x \approx 376$.

A jegyek ára kerekítés után lehetne: 380 Ft a 4 órásé, 760 Ft a 8 órásé és 1140 Ft a 12 órásé.