

1. Jenci rollert szeretne vásárolni, ezért elindul a boltba valamennyi pénzzel, mind három fabatkás. A boltban csak egyfajta roller van, az ára 19 fabatka. A boltosnak azonban csak öt fabatkásai vannak. Hogyan tudják a legkevesebb pénzdarab fölhasználásával lebonyolítani az üzletet? (11 pont)

2. Három szomszédos páratlan négyzetszám összege egy csupa azonos számjegyből álló négyjegyű szám. Határozzuk meg a négyjegyű számot. (12 pont)

3. Az $ABCD$ négyszög AB és CD oldala merőleges egymásra. Az AC szakasz felezőpontja E , a BD szakaszé F . Bizonyítsuk be, hogy $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4\overline{EF}^2$. (14 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y &= 7, \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} &= 7. \end{aligned}$$

(14 pont)

II. rész

5. Adott egy 14 cm sugarú körlap, melyből kivágunk egy körcikket, amely egy kúp palástja. Mekkora az így kapható legnagyobb térfogatú kúp, és milyen nagy ekkor a kör cikk középponti szöge? (16 pont)

6. A kosárlabda mérkőzéseken a büntetődobások szabálya a következő: a büntetőt végző játékos kétszer vagy háromszor dobhat, minden kosárral 1 pontot szerezhet, összesen legföljebb 2-t. Egy kosaras $p > 0$ valószínűséggel dob be egy büntetőt.

a) Milyen p valószínűség esetén szerez a játékos ugyanakkora eséllyel 1, illetve 2 pontot?

b) Írjuk föl tetszőleges p valószínűség mellett a büntetődobásokkal szerzett pontok várható értékét. (16 pont)

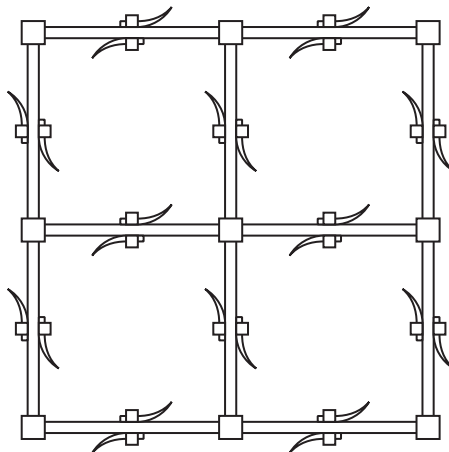
7. A lakásunk fűtését biztosító gázkazán elavult, sokszor javításra szorul, melynek költsége évente 15 000 Ft. Egy új kazán, amely hosszú ideig nem szorul javításra, 400 000 Ft-ért kapható. Érdemes volna új készüléket vásárolni. Erre két lehetőségünk van. Az egyik, hogy megtartjuk a régi készüléket, takarékoskodunk, és csak akkor veszünk újat a jelenlegi áron (megfigyelésünk szerint minden évben kapható hasonló készülék ilyen áron), amikor összejön rá a pénz. A banknál havi 10 000 Ft befizetésével egy külön takarékszámlán gyűjtjük a pénzt, amelyre éves 2% kamatot kapunk, amit havonta jóváírnak. Ebben az esetben azonnal megvásároljuk a készüléket, amint a pénz rendelkezésre áll, de sajnos minden megkezdett évben ki kell fizetnünk a javítás költségét.

A másik lehetőség, hogy folyószámlahitelből megvesszük a készüléket. Ennek éves kamata 20,41%. A családi költségvetésből a kölcsön törlesztésére évi 135 000 Ft-ot tudunk szánni.

Melyik a számunkra pénzügyileg kedvezőbb eset?

(16 pont)

8. A mellékelt *ábra* egy vas kerítés négy ismétlődő elemét mutatja oldalnézetből. A hosszú elemek mérete 30 cm és 4 cm, az őket egymáshoz kapcsoló négyzetek oldala 8 cm. Az íves elemeket kapcsoló négyzetek oldala 4 cm, a mellettük megtalálható négyzet oldala 2 cm. Az íves elemek merőlegesen csatlakoznak a 4 cm oldalú négyzethez és két körív határolja őket, melyek középpontja a négyzet csatlakozó oldalélének meghosszabbításán van. A kisebb kör sugara 12 cm, a hozzá tartozó ív a 4 cm-es négyzet csúcsánál indul és 60° -os középponti szögű. A nagyobb sugarú körív a négyzet oldalának középpontjánál kezdődik. A kerítés teljes vasszerkezete 2 cm vastagságú, függőlegesen négy, vízszintesen huszonnégy ismétlődő elemből áll.

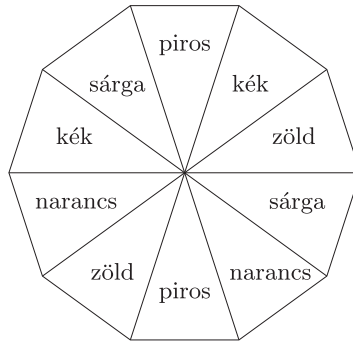


a) Számítsuk ki az íves elemet létrehozó nagyobb sugarú kör sugarát és a hozzá tartozó ív középponti szögét.

b) Számítsuk ki az íves elemek oldalnézetből látható területét.

c) Hány kg vasra volt szükség a kerítéshez? (A vas sűrűsége $7,86 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.) (16 pont)

9. Egy társasjáték szabályos tízsög alakú tábláját a következő módon szeretnénk kiszínezni: öt szín (piros, kék, zöld, sárga, narancs) mindegyikét kétszer felhasználva a tíz cikket úgy színezzük ki, hogy mindegyik színpár pontosan egy esetben legyen egymással szomszédos cikk színe. Az *ábrán* egy jó színezés látható. (A tábla díszített, ezért az elforgatásokkal és tükrözésekkel kapott színezések különböznek egymástól.)



a) Ha öt szomszédos cikket már kiszíneztünk öt különböző színnel, akkor a többi – szintén minden színt egyszer felhasználva – hányféleképpen színezhajjuk ki?

b) Adjunk példát olyan színezésre, ahol nincs egymás mellett öt különböző színű cikk. (16 pont)