

I. rész

1. Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós számpár, amelyre

$$\left. \begin{aligned} (x^2 + 5)^2 &= 25 - |y - 3| \\ 21x + 63y &= 188 \end{aligned} \right\}.$$

(11 pont)

2. Egy óra számlapja 20 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög. A mutatókat a háromszög középpontjában rögzítették úgy, hogy 12 órakor az egyik csúcs felé mutatsanak.

- a) Milyen hosszú lehet a nagymutató, ha soha nem nyúlik túl az óra számlapján?
 b) Három órakor a két mutató által meghatározott két félegyenes mekkora területű részt jelöl ki az óra számlapjából?
 (12 pont)

3. Egy egyfordulós röplabdakupán – ahol tehát bármely két csapat pontosan egyszer játszik egymással – 30 lejátszott mérkőzés után még minden csapatnak három mérkőzése volt hátra. Hány csapat szerepelt a kupán? (14 pont)

4. Határozzuk meg az $A \cap B$ halmazt, ha $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{3}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$. (14 pont)

II. rész

5. A $10^n + 14^n + 15^n + 21^n$ kifejezésben az n 3-mal osztható pozitív páratlan egész számot jelöl.

- a) Igazoljuk, hogy a négytagú összeg minden ilyen n esetén osztható lesz 1260-nal.
 b) A négytagú összeg két tagját véletlenszerűen kiválasztjuk. Mekkora valószínűséggel lesz a két tag összege hárommal osztható?
 (16 pont)

6. Egy háromszögben ismerjük mindhárom oldal hosszát és mindhárom szög nagyságát. Mutassuk meg, hogy ezeket az értékeket az

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma}$$

képletbe behelyettesítve a háromszög területét kapjuk. (16 pont)

7. Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ hozzárendeléssel megadott függvénynek három különböző zérushelye van és ezek közül a legnagyobb: $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$. (16 pont)

8. Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara 2, a befogókhoz hozzáírt köreinek sugara 3 és 10. Mekkora az átfogóhoz hozzáírt kör sugara? (16 pont)

9. Egy pihenőpark használatáért az üzemeltető pénzt szeretne kapni, ezért két lehetőséget dolgoztatott ki. Az első változat szerint lenne 12 órás és 6 órás jegy. A 12 órás jeggyel nyitástól zárásig bent lehet lenni 1000 Ft-ért, a 6 órás jegy ára pedig 600 Ft lenne. A második változat szerint lenne 3 órás jegy 350 Ft-ért, 6 órás jegy 600 Ft-ért, 9 órás jegy 850 Ft-ért és az ezt meghaladó időre szóló jegy 1250 Ft-ért. Megfigyeltek 150 látogatót és a következő gyakoriság adódott:

időtartam (h)	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12
gyakoriság (fő)	6	7	11	18	25	26	20	16	15	4	2	0

- a) Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel az első változat szerint?
 b) Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel a második változat szerint?
 c) Egy harmadik változatban 4, 8 és 12 órás jegyeket lehetne vásárolni, melyek ára arányos lenne az időtartammal. Milyen áron kellene adni ezeket a jegyeket, ha a rendelkezésre álló adatok alapján az egy főre eső átlagos bevételként 700 Ft körüli értéket szeretne kapni az üzemeltető és a jegyek ára 10-zel osztható?
 (16 pont)

¹ Számadó László 1999 szeptemberétől volt szerkesztőségünk tagja. 2004-től szerkesztette az Emelt szintű gyakorló feladatsorokat, melyek egy részét ő is állította össze. Sajnos nem tudja tovább e feladatokat vállalni. Most egy válogatást közlünk az eddigi feladatsoraiból.