

1. Bevezetés

A hitelek a gazdaságban jelentős szerepet játszanak, és matematikai modellezésük sem csupán könyvelőknek való feladat. Különösen nehéz probléma a hosszú távú hitelek (jelzálog-, diákhitelek stb.) tervezése, hiszen az évtizedekre terjedő törlesztési folyamat során nagyon megváltozhat a kiinduló helyzet. Ebben a cikkben röviden bemutatom a hiteltörlesztési folyamat három legegyszerűbb modelljét. 1. A hagyományos modellt, ahol a törlesztési pálya tervezésénél nem veszik figyelembe az inflációt, és a törlesztési részlet időben állandó. 2. Az ún. kettősen indexált jelzálog (angolul: Dual Indexed Mortgage, röviden: DIM) modelljét, ahol az infláció figyelembevétele miatt a törlesztési részlet vásárlóértéke időben állandó. 3. A devizaalapú jelzáloghitel modelljét, amelyben a forint hitel és törlesztése egy árnyékként számolt devizaalapú hitel és törlesztés átváltásából adódik.

A képletek egyszerűsítése miatt kamatláb helyett kamattényezővel ($1 + \text{kamatláb}$), inflációs ráta helyett inflációs tényezővel ($1 + \text{inflációs ráta}$) számolunk. Ugyanezért eltekintünk a kamatláb, az inflációs ráta és a forint leértékelődés időbeli változásától.

2. Hagományos hitel

A hiteltörlesztési folyamatot általában folyóáron – az infláció figyelembe vétele nélkül – tervezik a bankok. Legyen $D_0 > 0$ a hitel kezdőértéke, $T > 1$ a törlesztési idő és legyen $t = 1, 2, \dots, T$ a hiteltörlesztési időszakok (általában hónap, de itt év) indexe. A t -edik időszak (végi) törlesztése B_t , az időszakai kamattényező ($= 1 + \text{kamatláb}$) R , és az időszakvégi adósság D_t .

Definíció szerint igaz a következő azonosság:

$$\text{új adósság} = \text{régi adósság} + \text{kamat} - \text{törlesztés},$$

$$(1) \quad D_t = RD_{t-1} - B_t, \quad t = 1, 2, \dots, T-1, T, \quad D_0 \text{ adott}.$$

Figyelem: a köznyelv gyakran kamatnak nevezi a kamatlábat, holott az első $(R-1)D_t$, a második $R-1$.

Szükségünk lesz a (B_t) törlesztési sorozat *jelenértékére*, amelyet angol kezdőbetűi nyomán (present value) PV-vel rövidítünk. Definíció szerint a pénzfolyamat jelenértéke az a szám, amelynek megfelelő tőkét elhelyezve a hitel felvételekor a bankban, és a hitelkamatlábbal kamatoztatva az esedékes törlesztésekig, a hitelfelvevő éppen ki tudná fizetni az adósságát.

1. segéd-tétel. A (B_t) törlesztési sorozat jelenértéke

$$(2) \quad \text{PV} = \frac{B_1}{R} + \frac{B_2}{R^2} + \dots + \frac{B_T}{R^T}.$$

Bizonyítás. Gondoljuk azt, hogy a hitel felvételekor a hitelfelvevő T kamatozó bankbetétet képez, és a t -edikbe betesz $R^{-t}B_t$ forintot, $t = 1, \dots, T$. A kamatos kamat miatt a t -edik időszak végére a t -edik betét éppen B_t -re duzzad, tehát ebből tudja fizetni az esedékes törlesztést. Ha összeadjuk a bankbetétek értékét, adódik (2). $\square$

Ésszerű feltevés, hogy a hitelérték éppen a törlesztési sorozat jelenértéke: $D_0 = \text{PV}$. A valóságban azonban a kamatlábrés ($= \text{hitelkamatláb} - \text{betéti kamatláb}$) miatt a hitelkamatláb jóval nagyobb, mint a betéti kamatláb. A jelzáloghitel esetében azonban a kamatlábrés nem túl jelentős.

A hagyományos hitelnél időben változatlan a törlesztés: $B_t = B$. Igaz az

1. tétel. A T futamidő esetén a $D_0 > 0$ nagyságú hitel időben állandó törlesztőrésze

$$(3) \quad B = \frac{(R-1)D_0}{1 - R^{-T}}, \quad R > 1.$$

Bizonyítás. $B_t = B$ esetén (2)-ben alkalmazható a mértani sorozat összegképlete:

$$D_0 = \text{PV} = R^{-1} \frac{1 - R^{-T}}{1 - R^{-1}} B.$$

Rendezéssel adódik (3). $\square$

¹Köszönetemet fejezem ki *Király Júliának*, hogy lehetővé tette, hogy a készülő közös munkánk egy részét hasznosíthassam a KöMaL-ban.

A valóságban a kamattényező idővel változik, s e miatt a bank akár minden időszakban újraszámolhatja az esedékes törlesztési részletet, miközben felteszi, hogy a kamattényező a következőkben már nem változik. Ezzel a fontos bonyodalommal azonban ebben a cikkben nem foglalkozunk.

A következő feladat egy szakemberek által is gyakran figyelmen kívül hagyott jelenségre hívja föl a figyelmet. (Megoldás a cikk végén.)

1. feladat. Jelölje $B(T)$ a T futamidőhöz tartozó törlesztést. Igazoljuk, hogy $B(T) = B(2T)(1 + R^{-T})$, ezért $R > 1$ esetén a futamidő megduplázása nem felezi a törlesztőrészt: $B(2T) > B(T)/2$!

Egyszerűsége miatt érdemes az öröktörlesztést külön is bemutatni.

1. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, akkor

$$(3') \quad B = (R - 1)D_0 \quad \text{és} \quad D_t = D_0.$$

Ebből leolvasható, hogy a változatlan törlesztőrészlet a kamattal egyenlő. Az is látszik, hogy nagyobb, például 10%-os éves kamatláb esetén képtelenség² egy 10 mFt-os hitelt törleszteni, hiszen csak az éves kezdőrészlet 1 mFt lenne.

A jelzáloghitel egyik legnagyobb problémája, hogy modern gazdaságban – a válságoktól eltekintve – az általános árszínvonal emelkedése (köznapi nyelven: az infláció) nem hanyagolható el. Ennek vizsgálatában visszatérünk a változó törlesztésű pályához: (B_t) . Legyen az időben állandó inflációs tényező: p , és a t -edik időszakvégi halmozott árindex: $P_t = p^t$, $P_0 = 1$. Osszuk el az (1) egyenlet mindkét oldalát P_t -vel:

$$(5) \quad \frac{D_t}{P_t} = \frac{R}{p} \frac{D_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{B_t}{P_t}.$$

Ezen a ponton bevezetjük a reálkamat-tényezőt, a reáltörlesztést és a reál-adósságállományt:

$$(6) \quad r = \frac{R}{p}, \quad b_t = \frac{B_t}{P_t} \quad \text{és} \quad d_t = \frac{D_t}{P_t}.$$

A korábbi változókat *nominális* jelzővel különböztetjük meg reáltársaitól. Figyeljük meg, hogy a nominális kamattényezőt az éves inflációs tényezővel osztottuk, a törlesztőrészletet és az adósságot viszont az árszinttel.

(6) segítségével (5) egyszerűsíthető:

$$(7) \quad d_t = r d_{t-1} - b_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad d_0 \text{ adott}.$$

Szóban: új reáladósság = régi reáladósság + reálkamat – reáltörlesztés.

Kitérőként megemlítyük, hogy rossz hagyományként a közgazdászok a reálkamatlábát gyakran azonosítják a nominális kamatláb és az inflációs ráta különbségével. Ez azonban csak néhány százalékos ráták esetén elfogadható közelítés, amikor

$$r - 1 = \frac{R}{p} - 1 = \frac{R - p}{p} \approx (R - 1) - (p - 1), \quad \text{ha} \quad R, p \approx 1.$$

A képletek jobb megértését számpéldákkal segítjük. Alapadatok: a hitel futamideje: $T = 20$ év, a hitel összege: $D_0 = 10$ mFt.

Bár a nominális kamatláb és az inflációs ráta részben független egymástól, szemléltetésünkben célszerű a reálkamat-tényezőt rögzíteni: $r = 1,06$. Az 1. táblázatban azt nézzük meg, hogyan hat az inflációs ráta növekedése az éves törlesztési részletre. Állandó árszintnél a törlesztés 872 eFt, 6%-osnál már 1369 eFt – ez már kifizethetetlen³. Persze, az évek múltával a törlesztés reálértéke időben egyre inkább csökken. Nulla infláció esetén a zárótörlesztés reálértéke 872 eFt, s 6%-os infláció esetén 427 eFt-ra csökkenne, ha kifizethető lett volna.

1. táblázat. Az infláció hatása az éves induló és záró törlesztésre, eFt

Inflációs index	Nyitó törlesztés	Záró reál törlesztés
p	B	b_T
1,00	872	872
1,03	1110	614
1,06	1369	427

Megjegyzés. Reálkamat-tényező: $r = 1,06$, nominálkamat-tényező: $R = rp$, záró törlesztés reálértéke: $b_T = B/p^T$.

3. Kettősen indexált törlesztés

² A mai átlagos jövedelmekhez viszonyítva.

³ A mai átlagos jövedelmekhez viszonyítva.

1975 körül *Franco Modigliani* (Nobel-emlékdíjas közgazdász) választ keresett a gyors infláció okozta kezdőtörlesztési gondokra. Megoldásként az ún. *kettősen indexált hitelt* javasolta, ahol nemcsak a reálkamat-tényező, hanem a b_t reáltörlesztés is állandó: $r_t = r$ és $b_t = b$. Ekkor (7) tovább egyszerűsödik:

$$(8) \quad d_t = r d_{t-1} - b, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Az 1. tétel helyére lép a

2. tétel. *Ha a reálkamat-tényező állandó és a bank úgy állapítja meg az esedékes hiteltörlesztést, hogy a reáltörlesztés minden időszakban állandó legyen, akkor a reáltörlesztés*

$$(9) \quad b = \frac{(r-1)D_0}{1-r^{-T}}, \quad r > 1;$$

míg a reáladósság (8) szerint alakul.

Visszatérünk 1. példánkhoz.

2. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, és kettősen indexált törlesztést alkalmaz a bank, akkor a törlesztőrészlet

$$(3'') \quad b = (r-1)D_0.$$

Ebből leolvasható, hogy ilyenkor a változatlan reálértékű törlesztőrészletnek a hitelhez viszonyított aránya a reálkamatlábbal egyenlő. Alacsony éves reálkamatláb esetén még magas nominálkamatláb mellett is törleszthető a kezdőrészlet.

A 2. táblázatban azt vizsgáljuk, hogyan hat a reálkamat-tényező emelkedése a kettősen indexált hitel törlesztésére. 0%-os reálkamatlábánál fejből tudjuk az eredményt: $10/20 = 500$ eFt; 3%-os reálkamatlábánál az éves törlesztés 672 eFt, de 6% esetén már 872 eFt! (Az 1. táblázat 1. sora.)

2. táblázat. A reálkamatláb hatása az éves törlesztésre: DIM

Reálkamat-tényező	Éves törlesztés (eFt)
r	b
1,00	500
1,03	672
1,06	872

A 2. feladat a két típusú hitel érdekes különbségét emeli ki. (Megoldás a cikk végén.)

2. feladat. Mutassuk meg, hogy a hagyományos hitelnél a nominális adósság időben monoton csökken, míg a kettős indexálású hitelnél a monotonitás csak akkor igaz, ha az inflációs tényező elegendően kicsi, nevezetesen ha

$$p < \frac{1-r^{-T}}{1-r^{-T+1}}.$$

Például $r = 1,03$ reálkamat-tényező esetén az infláció ráta legfeljebb csak 3,9% lehet: $p < 1,039$, ha a tartozást monoton csökkenőnek akarjuk.

Egyébként a magyar diákhitel is a kettős indexálású hitelhez hasonlít, csak a futamidő változó, és a törlesztőrészlet a mindenkor egyéni kereset rögzített százaléka. Állandó reálkereset esetén a törlesztési pálya azonossá válik a kettős indexálású pályával.

4. Devizaalapú-hitel

Alacsonyabb és stabilabb kamatlábak, valamint elhanyagolható infláció, és kedvező árfolyamok miatt számos országban a hazai valuta helyett valamilyen más ország devizája alapján számolják el a jelzálog- (és egyéb) hiteleket. Magyarországon 2004 után terjedt el ez a forma, és az alacsonyabb kamatlábak és stabil árfolyam miatt a svájci frank nemcsak a forint-, de az eurókölsönöket is kiszorította. 2008-ban azonban beütött a nemzetközi pénzügyi és gazdasági válság. Míg az euró forint árfolyama 250-ről csak 300-ra (20%-kal) nőtt, addig a svájci franké 150-ről 250-re (67%-kal) ugrott. Emellett a devizakamatláb is nőtt.

Új modellünkben is állandó paraméterértékekre szorítkozunk, de a forint adósság helyére egyelőre a devizában kifejezett adósság lép (*-gal jelölve a devizában adott kamattényezőt, adósságot és törlesztőrészletet):

$$(10) \quad D_t^* = R_t^* D_{t-1}^* - B_t^*, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad 1 < R^* < R.$$

Mivel a *devizaalapú* hitelnél a devizában kifejezett adósságot (D_t^*) és a törlesztést (B_t^*) a bank minden időszakban forintra számítja át, ezért szükségünk lesz a külső valuta árfolyamára (a hazai valutában kifejezve): E_t , és időben állandónak feltételezett relatív változására:

$$(11) \quad e = E_t/E_{t-1} > 1.$$

Felírjuk a (10) devizaadósság-dinamika forintban kifejezett alakját:

$$(12) \quad E_t D_t^* = e R_t^* E_{t-1} D_{t-1}^* - E_t B_t^*, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Ekkor a devizáról a forintra átszámított (hullámos) törlesztőrészlet és adósság rendre

$$(13) \quad \tilde{B}_t = E_t B_t^*, \quad \text{és} \quad \tilde{D}_t = E_t D_t^*.$$

Az 1. és a 2. tétel helyére most új tétel lép.

3. tétel. *Ha a bank minden időszakban állandónak veszi a törlesztés devizaértékét, akkor a t -edik időszak törlesztőrészletének deviza- és forint értéke rendre*

$$(14) \quad B^* = \frac{(R^* - 1)D_0^*}{1 - R^{*-T}} \quad \text{és} \quad \tilde{B}_t = E_t B^*,$$

míg a devizaadósság (10), s a forintra átszámítva pedig (13) szerint alakul.

Bevezetve az $\tilde{R} = eR^*$ devizaalapú hitel forint kamattényezőjét, (13) segítségével (12) átírható:

$$(15) \quad \tilde{D}_t = \tilde{R} \tilde{D}_{t-1} - \tilde{B}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad \tilde{D}_0 = D_0.$$

Hasonlítsuk össze a forintalapú adósság (1) egyenletét a devizaalapú adósság forintban kifejezett (15) egyenletével. Látható, hogy a két kamatláb pontosan akkor azonos, ha

$$R = \tilde{R} (= R^* e).$$

Ezt az esetet nevezik *fedezetlen kamatparitásnak*: a hazai kamattényező = külső kamattényező $\times$ árfolyamváltozás. Bár az eltérő törlesztési folyamat miatt eltérő a két adósságdinamika, a hitel jelenértéke mindkét esetben azonos. Ha emellett a forint hazai értékvesztése párhuzamos a leértékelődéssel: $p = e$, azaz a reálárfolyam állandó, akkor különösen egyszerű az összehasonlítás. Ekkor a devizaalapú hitel azonos a kettős indexálású forinthitellel. A forint hitel hazai törlesztőrészletei reálértékben magasról indulnak, de erősen csökkennek; míg a devizaalapú hitelek alacsonyabb szintről indulnak, de reálértékben állandóak.

A jelenérték segítségével összehasonlíthatjuk a forint és a devizaalapú hitelt is. Emlékeztetőül: $PV = D_0$. Relatív árfolyammal dolgozva (egységnyiinek véve a kezdő árfolyamot), azaz (11)–(13) segítségével

$$\tilde{PV} = B^* \left(\frac{e}{R} + \dots + \frac{e^t}{R^t} \right), \quad \text{ahol} \quad E_0 = 1.$$

Bevezetve a $\rho = R/e$ forint-ekvivalens devizakamattényezőt, (14) segítségével a devizaalapú hitel jelenértéke zárt alakban egyszerűen felírható:

$$\tilde{PV} = \frac{R^* - 1}{1 - R^{*-T}} \frac{1 - \rho^{-T}}{\rho - 1} D_0,$$

amely pontosan akkor nagyobb vagy kisebb, mint eredeti forinttársa: $PV = D_0$, ha $\rho > R^*$ vagy $\rho < R^*$.

Harmadszor is megvizsgáljuk a legegyszerűbb esetet.

3. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, és devizaalapú hitelt alkalmaz a bank, akkor a t -edik időszak törlesztőrészletének deviza- és forint értéke rendre

$$(3^*) \quad B^* = (R^* - 1)D_0 \quad \text{és} \quad \tilde{B}_t = E_t (R^* - 1)D_0.$$

Ebből leolvasható, hogy ilyenkor a változatlan deviza törlesztőrészletnek a hitelhez viszonyított aránya a devizakamatlábbal egyenlő. Alacsony devizakamatláb esetén komolyabb hitelt is lehetséges törleszteni, feltéve, hogy a leértékelődés az inflációhoz és a nominál jövedelmi pályához képest nem túl gyors.

A 3. táblázat készítésekor három esetet vizsgálunk: a) az árfolyam állandó: $e = 1$, tehát a devizaalapú kamatláb kisebb, mint a forintkamatláb: $eR^* < R$; b) a leértékelődés követi az inflációt: $e = p$, és a devizaalapú kamatláb egyenlő a forintkamatlábbal: $eR^* = R$; c) a forint leértékelődés gyorsabb, mint az infláció: $e > p$, és a devizaalapú kamatláb nagyobb, mint a forintkamatláb: $eR^* > R$. Az a) eset a 2004–2008-as helyzet, a c) eset a 2009-től kialakuló helyzet *stilizált* képe, és a b) eset a kettő között egy simább átmenet. Számszerűen: $R^* = 1,06$; $p = 1,06$; $R = R^* p = 1,1236$; $e_a = 1$, $e_b = R/R^* = 1,06$ és $e_c = 1,1$.

A forint hitel kezdőrészlete 1 369 eFt, záró reálértéke csupán 427 eFt (1. táblázat utolsó sora). A devizaalapú hitel kezdőrészlete mindhárom esetben 872 eFt. A kedvező esetben a záró reálérték 272 eFt, a hitel jelenértéke csak 6,4 mFt. A kedvezőtlen esetben a záró reálérték 1 829 eFt, a jelenérték viszont 14,1 mFt. A semleges esetben a törlesztés reálértéke változatlan, és a jelenérték megegyezik a hitellel.

3. táblázat. A devizaalapú hitel és a leértékelődés

Leértékelődési tényező	Reáltörlesztés (eFt)		Devizaalapú-hitel jelenértéke (mFt)
	kezdő	záró	
e	$\tilde{b}_1$	$\tilde{b}_T$	PV
1,00	872	272	6,368
1,06	872	872	10,000
1,10	872	1829	14,058

Megjegyzés. $R^* = 1,06$, $p = 1,06$ és $R = 1,1236$; forint hitel törlesztőrésze: $B = 1\,369$ eFt, záró reálértéke: $b_T = 427$ eFt.

Közelebb kerülnénk a jelenlegi magyar helyzethez, ha egy időben változó paraméterű devizaalapú hitelt vizsgálnánk: egy nagyon kedvezőnek induló devizaalapú hitel (1. sor) egy hirtelen változás miatt nagyon kedvezőtlené válik (3. sor). Ennek szemléltetését az Olvasókra bizzuk.

Feladatmegoldások

1. feladat. (3) értelmében

$$B(2T) = \frac{R-1}{1-R^{-2T}} D_0.$$

Jól ismert algebrai azonosság szerint a jobb oldal

$$\frac{R-1}{(1-R^{-T})(1+R^{-T})} D_0,$$

s ez (3) értelmében

$$\frac{B(T)}{1+R^{-T}} D_0.$$

2. feladat. a) Az egyszerűség kedvéért csak $D_1 < D_0$ -t igazoljuk. (3) értelmében $B(\infty) < B(T)$, és (1)-et felhasználva

$$D_1 = RD_0 - B(T) < RD_0 - B(\infty) = D_0.$$

b) (9) értelmében a kettős indexálású hitelnél a $B(\infty) < b(T)$ pontosan akkor teljesül, ha

$$(pr-1)D_0 < \frac{(r-1)D_0}{1-r^{-T}}$$

áll. Rendezéssel adódik a 2b) feladat feltétele.