

I. rész

1. Egy közvélemény-kutatás kérdéseire az első hónapban 700 ember válaszolt, mindenki pontosan egyet választott a felkínált három lehetőség közül. A feleletek aránya 4 : 7 : 14 volt. Ezután még néhány ember részt vett a közvélemény-kutatásban, így a feleletek aránya 6 : 9 : 16 lett. Legkevesebb hány ember válaszolt utólag a kérdésekre? Ebben az esetben végül melyik lehetőséget hányan választották? (11 pont)

Megoldás. A 700 ember választását arányosan elosztva a lehetőségeket először 112, 196, 392 ember választotta. A második esetben az arányszámok összege 31, így gondolhatnánk, hogy a 700-at követő 31-el osztható szám megfelelő lesz. Ez a 713. Ezt arányosan elosztva 138, 207, 368 jön ki a lehetőségeket választók számára. Ez azonban nem lehetséges, mert a harmadik lehetőséget választók száma csökkenne az előző esethez képest. Tehát keressük a legkisebb, 392-nél nagyobb 16-al osztható számot. Ez a $400 = 25 \cdot 16$. Így a végső szavazók száma legkevesebb $25 \cdot 31 = 775$. Tehát legkevesebb 75 ember válaszolt utólag és ekkor az adott lehetőségeket 150, 225 és 400 ember választotta.

2. A mosogatógépközpont háromféle program van. Egy mosogatáshoz az A program 30%-kal több elektromos energiát, viszont 20%-kal kevesebb vizet használ, mint a B program. A B program 15%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ egy mosogatáshoz, mint a C program. Mindhárom program futtatásakor 50 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogató az A programmal 165 Ft-ba, a B programmal 150 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül a C programmal egy mosogató? (12 pont)

Megoldás. A B program x Ft értékű elektromos energiát és y Ft értékű vizet használ egy mosogató alkalmazásával: $x + y + 50 = 150$. Az A program $1,3x$ Ft értékű elektromos energiát, és $0,8y$ Ft értékű vizet használ egy mosogató alkalmazásával. A költségre vonatkozó egyenlet: $1,3x + 0,8y + 50 = 165$.

A következő egyenletrendszert kapjuk x -re és y -ra:

$$\begin{aligned}x + y &= 100, \\1,3x + 0,8y &= 115.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 70$, $y = 30$.

A feltételek alapján a C program futtatása során az elektromos energia ára: $x/0,85 \approx 82$ Ft, a víz ára: $y/1,25 = 24$ Ft. A mosogatószer árát is figyelembe véve a C programmal egy mosogató $82 + 24 + 50 = 156$ Ft-ba kerül.

3. Hányféleképpen húzhatunk ki a 32 lapos magyar kártyából 6 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két piros, két zöld és két ász? (14 pont)

Megoldás. 1. eset: A két ász éppen a piros és a zöld ász. Ekkor még egy piros lapot kell választanunk a maradék 7 piros közül, egy zöldet a maradék 7 zöld közül és 2 lapot a nem piros, nem zöld és nem ász 14 lap közül. Az esetek száma:

$$N_1 = \binom{7}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{14}{2} = 7 \cdot 7 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} = 4459.$$

2. eset: Az egyik ász a piros ász, a másik nem a zöld ász. Ekkor kell egy ászt választanunk a másik két ász közül, majd egy piros lapot a maradék 7 piros közül, két zöld lapot a nem ász 7 zöld közül és még egy lapot a nem piros, nem zöld és nem ász 14 lap közül. Az esetek száma:

$$N_2 = 2 \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{14}{1} = 2 \cdot 7 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 14 = 4116.$$

3. eset: Az egyik ász a zöld ász, a másik nem a piros ász. $N_3 = N_2 = 4116$.

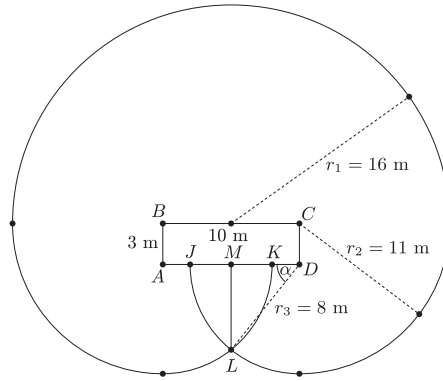
4. eset: A makk és a tök ászt választjuk. Ekkor kell még 2 piros lapot választanunk a nem ász 7 piros közül, 2 zöld lapot pedig a nem ász 7 zöld közül. Az esetek száma:

$$N_4 = \binom{7}{2} \cdot \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 441.$$

Az összes esetek száma: $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 4459 + 2 \cdot 4116 + 441 = 13\,132$.

4. Egy kecske egy kerítéssel védett 10×3 m-es virágágy körüli, elegendően nagy réten legel. A kecskét 16 m hosszú kötéllel a kerítés 10 méteres oldalának felezőpontjánál levert cölöphöz kötötték. Mekkora területen legelheti le a fűvet a kecske? Hányadrészére csökken ez a terület, ha a kötélt hosszát 10 méterre csökkentik? (14 pont)

Megoldás. A 16 méteres kötélt esetén a lelegelhető terület egy 16 m sugarú félkörből és két-két 11 és 8 m sugarú negyed körből áll. A virágágyas mögött a 8 m sugarú negyed körök átfedik egymást (1. ábra). Ezt a területet duplán számoljuk a fél és negyed körök területének összegzésekor, tehát egyszer le kell vonni. A keletkező JKL idomot egy egyenes szakasz és két körív határolja. Állítsunk merőleget az L pontból a JK szakaszra. A merőleges szakasz M talppontja a JK szakasz és az AD szakasz felezőpontja lesz. Így két egybevágó fél körszelet jött létre. A fél körszelethez tartozó középponti szög a DML derékszögű háromszögben: $\cos \alpha = 5/8$, amiből $\alpha \approx 51,32^\circ$. A két fél körszeletből egy egész körszeletet összeállítva a 8 cm sugarú körben, a hozzá tartozó körívk középponti szöge: $2\alpha \approx 102,64^\circ$.



1. ábra

A körszelet területe, amit majd le kell vonnunk:

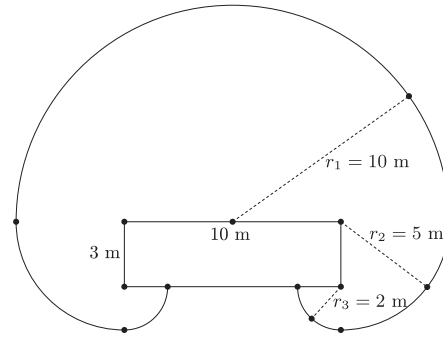
$$T_{\text{szelet}} = T_{\text{cikk}} - T_{\Delta} = \frac{8^2 \pi}{360^\circ} \cdot 102,64^\circ - \frac{8^2 \sin(102,64^\circ)}{2} \approx 57,32 - 31,22 = 26,1 \text{ m}^2,$$

$$T_{16} = \frac{(16^2 + 11^2 + 8^2) \cdot \pi}{2} - T_{\text{szelet}} \approx 692,72 - 26,1 = 666,62 \text{ m}^2.$$

A megrövidített, 10 m hosszú kötél esetén (2. ábra):

$$T_{10} = \frac{(10^2 + 5^2 + 2^2) \cdot \pi}{2} = 64,5\pi \approx 202,6 \text{ m}^2,$$

$$\frac{T_{10}}{T_{16}} = \frac{202,6 \text{ m}^2}{666,62 \text{ m}^2} \approx 0,304.$$



2. ábra

A lelegelhető terület közel 30%-ára csökken a kötél lerövidítésével.

II. rész

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\log_4 (4 \sin^2 2x) = 2 - \log_2 (-2 \operatorname{tg} x). \quad (16 \text{ pont})$$

Megoldás. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \neq 0$ és $\operatorname{tg} x < 0$ esetén átalakítva az egyenlet bal, majd jobb oldalát:

$$\log_4 (4 \sin^2 2x) = \frac{\log_2 (4 \sin^2 2x)}{\log_2 4} = \frac{\log_2 (4 \sin^2 2x)}{2};$$

$$2 - \log_2 (-2 \operatorname{tg} x) = \log_2 4 - \log_2 (-2 \operatorname{tg} x) = \log_2 \frac{4}{-2 \operatorname{tg} x}.$$

Ezután az egyenlet:

$$\frac{\log_2 (4 \sin^2 2x)}{2} = \log_2 \frac{4}{-2 \operatorname{tg} x},$$

amiből

$$\log_2 (4 \sin^2 2x) = \log_2 \left(\frac{2}{-\operatorname{tg} x} \right)^2.$$

Mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton növekvő, így

$$4 \sin^2 2x = \left(\frac{2}{-\operatorname{tg} x} \right)^2,$$

amiből

$$4 \cdot 4 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{4 \cos^2 x}{\sin^2 x}, \quad \text{és így} \quad 4 \sin^4 x \cos^2 x = \cos^2 x.$$

Mivel $\cos x \neq 0$, ezért $4 \sin^4 x = 1$, vagyis $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, amiből $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mivel $\operatorname{tg} x < 0$, ezért a megoldás $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

6. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hatoslottó húzáson a 45 számból (visszatevés nélkül) 6-ot kihúzva, a hat lottószámot növekvő sorrendbe rakva egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk? (16 pont)

Megoldás. Az összes lehetséges eset száma $C_{45}^6 = \binom{45}{6} = 8\,145\,060$.

Kedvező eset az, ahol a kihúzott számokat növekvő sorrendbe rendezve azok a következő alakúak: $a, a + r, a + 2r, a + 3r, a + 4r, a + 5r$, ahol $a, r \in \mathbb{N}^+$, $a \leq 40$, $r \leq 8$.

Az a lehetséges értékei $r = 1$ esetén $1, 2, \dots, 40$; $r = 2$ esetén $1, 2, \dots, 35$; $r = 3$ esetén $1, 2, \dots, 30$; $\dots$; $r = 8$ esetén $1, 2, 3, 4, 5$.

Összesítve a kedvező eseteket: $40 + 35 + 30 + \dots + 5 = \frac{40+5}{2} \cdot 8 = 180$ eset. Tehát a valószínűség:

$$p = \frac{180}{8\,145\,060} \approx 2,210 \cdot 10^{-5}.$$

7. Milyen görbét ír le az $y = x^2 - 2(m-3)x + m - 8$ parabola csúcsa, ha az m paraméter értéke végigfut a valós számok halmazán? Az m paraméter mely értékénél lesz a csúcs ordinátája maximális? Adjuk meg ebben az esetben a parabola $P(0; -5)$ ponton átmenő érintőjének egyenletét. (16 pont)

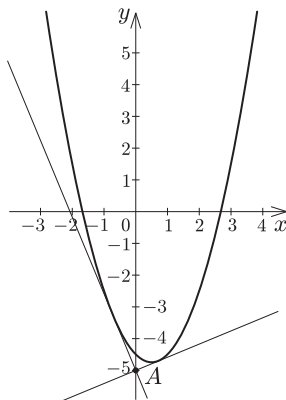
Megoldás.

$$y = x^2 - 2(m-3)x + m - 8 = (x - (m-3))^2 - (m-3)^2 + m - 8.$$

A parabola csúcsa $x = m - 3$ -nál van, ordinátája ekkor $y = -(m-3)^2 + m - 8 = -(m-3)^2 + (m-3) - 5$, vagyis a csúcs az $y = -x^2 + x - 5$ egyenletű parabolán fog mozogni. Az

$$y = -x^2 + x - 5 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{3}{4}$$

függvény maximuma $x = \frac{1}{2}$ -nél van, értéke $y = -4\frac{3}{4}$. Tehát a parabola csúcsa $x = m - 3 = \frac{1}{2}$, azaz $m = 3,5$ esetén lesz a legmagasabban.



3. ábra

Az érintő egyenlete $y = kx - 5$ alakú. A parabola egyenlete $y = x^2 - x - 4,5$. Keressük a k paraméter értékeit, ha az egyenes a parabola érintője. Ez akkor lesz, ha az egyenesnek és a parabolának egy közös pontja van.

$$kx - 5 = x^2 - x - 4,5, \quad \text{vagyis} \quad x^2 - (1 + k)x + 0,5 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = (1 + k)^2 - 2 = 0$, amiből $(1 + k)^2 = 2$, vagyis $1 + k = \pm\sqrt{2}$. Így $k_1 = \sqrt{2} - 1$ és $k_2 = -\sqrt{2} - 1$ a két lehetséges érték. Tehát az érintők egyenlete:

$$y = (\sqrt{2} - 1)x - 5 \quad \text{és} \quad y = (-\sqrt{2} - 1)x - 5 \quad (3. \text{ ábra}).$$

8. Az azonos tengerszint feletti magasságban fekvő Hencida és Boncida között a távolság 5 km. Hencidából egy közeli hegy csúcsa 30° -os, Boncidából pedig 11° -os szög alatt látszik. Hencidából a hegy csúcsát és Boncidát összekötő szakasz látószöge 120° -os.

a) Milyen magas a hegy?

b) A két várost összekötő szakasz felénél elindítanak egy távirányításos repülőgépet, ami végig a szakaszfelező merőleges síkjában mozog. Mennyire közelítheti meg repülés közben a hegy csúcsát? (16 pont)

Megoldás. a) A 4. ábra jelöléseit használjuk. Legyen x a hegy magassága. A CTH és CTB derékszögű háromszögekben $\sin 30^\circ = \frac{x}{a}$, illetve $\sin 11^\circ = \frac{x}{b}$, ebből $a = 2x$ és $b = \frac{x}{\sin 11^\circ} \approx 5,24x$.

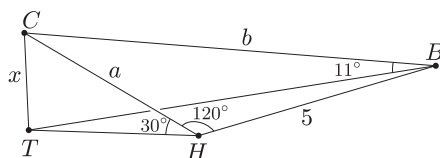
A CHB háromszögben felírhatjuk a koszinusztételt a b oldalra, majd behelyettesítjük az előbb kapott összefüggéseket: $b^2 = a^2 + 5^2 - 2 \cdot a \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$.

$$(5,24x)^2 = (2x)^2 + 25 - 2 \cdot 2x \cdot 5 \cdot (-0,5), \quad \text{ebből}$$

$$27,4576x^2 = 4x^2 + 25 + 10x, \quad \text{bal oldalra rendezve}$$

$$23,4576x^2 - 10x - 25 = 0.$$

Az egyenletet megoldva és a magasságra kapott negatív megoldást elvetve: $x = 1,2673$. Tehát a hegy magassága (ahhoz a tengerszint feletti magassághoz képest, ahol Hencida és Boncida is fekszik) kb. 1267 m.



4. ábra

b) Az 5. ábra jelöléseit használjuk. A legkisebb távolság esetén a repülőgép (R) rajta van a HB szakasz S felező merőleges síkján, a hegy csúcsának magasságában. A keresett távolság CR . Ennek a vízszintes szakasznak a vízszintes síkra eső merőleges vetülete TN , amely a $TNFH$ derékszögű trapéz hosszabbik alapja lesz. A 4. ábra szerint

$$TH = \frac{x}{\tan 30^\circ} \approx 2,195 \quad \text{és} \quad TB = \frac{x}{\tan 11^\circ} \approx 6,520.$$

Jelölje a TN szakaszon P azt a pontot, amelyre $PHB \perp$, és legyen $\alpha = THP$. A THB háromszögben a koszinusz tétel alapján

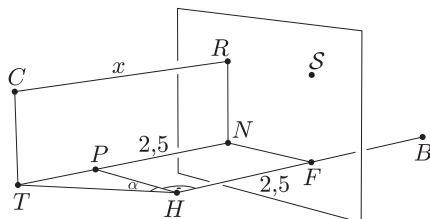
$$6,520^2 = 2,195^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2,195 \cdot \cos(\alpha + 90^\circ),$$

amiből $\cos(\alpha + 90^\circ) \approx -0,5782$, azaz $\alpha + 90^\circ \approx 125,32^\circ$, vagyis $\alpha \approx 35,32^\circ$. A TPH derékszögű háromszögben:

$$TP = TH \cdot \sin \alpha \approx 2,195 \cdot 0,5777 \approx 1,268,$$

$$RC = TN = TP + PN = 1,268 + 2,5 = 3,768.$$

Tehát a repülőgép a hegycsúcsot kb. 3768 méterre közelítheti meg.



5. ábra

9. János egy vízzel teli hordó aljára 4 mm átmérőjű lyukat fúrt és a kifolyó víz sebességét vizsgálta. A Bernoulli-egyenletből levezette, hogy $v = \sqrt{2gx}$, ahol x a vízszint pillanatnyi magassága. Megmérte, hogy a teli hordóból az első másodpercben $62,8 \text{ cm}^3$ víz folyt ki. (A sebességet itt állandónak vehetjük, a rövid mérési idő miatt.) Ezután megállapította, hogy 5 perc alatt pontosan 10 cm-rel csökkent a vízszint. Feltételezzük, hogy a vízszint exponenciálisan csökken az $x = h \cdot 2^{-t/T}$ függvény szerint, ahol h a kezdeti vízszint magassága, T pedig a hordóban lévő víz „felezési ideje”. A hordót üresnek tekinthetjük, ha már csak 1 cm magas a vízszint benne. A teli állapotból mennyi idő alatt ürül ki a hordó? (16 pont)

Megoldás. A lyuk átmérője $d = 4 \text{ mm}$, sugara $r = 2 \text{ mm} = 0,2 \text{ cm}$. Keresztmetszete $A = r^2\pi = 0,2^2\pi \approx 0,1257 \text{ cm}^2$. A $t = 1 \text{ sec}$ alatt kifolyó vízmennyiség $V = Avt$, amiből a sebesség

$$v = \frac{V}{At} = \frac{62,8 \text{ cm}^3}{0,1257 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ sec}} \approx 499,6 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \approx 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A $v = \sqrt{2gx}$ képletből kiszámíthatjuk a hordóban lévő víz kezdeti magasságát:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 10} = 1,25 \text{ m} = 125 \text{ cm}.$$

A vízszint 5 perc alatt 10 cm-rel csökken, így $t = 300 \text{ sec}$ esetén $x = 115 \text{ cm}$. Ezeket behelyettesítve a képletbe a felezési idő meghatározható: $115 = 125 \cdot 2^{-300/T}$, amiből

$$T = \frac{-300 \cdot \lg 2}{\lg \frac{115}{125}} = 2494 \text{ sec} \approx 41,6 \text{ perc}.$$

T ismeretében kiszámítható az $x = 1 \text{ cm}$ vízmagassághoz tartozó idő, ami a hordó kiürülését jelenti: $1 \text{ cm} = 125 \text{ cm} \cdot 2^{-t/2494}$, amiből

$$t = \frac{-2494 \cdot \lg \frac{1}{125}}{\lg 2} \approx 17\,373 \text{ sec} = 4 \text{ óra } 49 \text{ perc } 33 \text{ sec}$$

alatt ürül ki a hordó.