

JÓTANÁCS: Ha egy feladat egy kör és egy egyenes, vagy két kör egy bizonyos metszéspontját kéri, akkor rajzoljuk meg a bizonyítandó állítást a másik metszésponttal is, és vizsgáljuk a kétféle esetet egyszerre, ugyanazon az ábrán.

Két példát szeretnék mutatni arra, hogy ez az elv hogyan használható versenyfeladatok megoldásában. Mindkét példa a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián szerepelt. Az elsőt, amit a nemzetközi zsűri közepes nehézségű feladatnak szánt, a közel száz országból válogatott 548 versenyző közül csak 86 tudta megoldani – ennyien kapták meg a maximális 7 pontot –, és további 7 kapott 6-ot vagy 5-öt. (A magyar csapat összesen 1 + 1 pontot szerzett.) A másik példa az idei 3. feladat, ezt az 577 versenyző közül 30 oldotta meg kifogástalanul, és még egyvalaki kapott 6 pontot. (A magyarok közül négyen kaptak egy-egy pontot.)

Gondoljuk meg, hogy mi is van a Jótanács mögött. Képzeljük el, hogy egy feladatot, ahol valamilyen geometriai egybeesést (pl. három egyenes egy ponton megy át) kell bizonyítani, koordinátákkal oldunk meg. Először különböző betűket választunk a szabadon választható paraméterek, például a különböző pontok koordinátáinak jelölésére, utána pedig ezekkel a betűkkel kifejezzük a korábbiaktól függő pontok koordinátáit és a különböző görbék, egyenesek egyenleteiben szereplő együttthatókat. Ha pontosan számolunk, a végén a bizonyítandó állítás egy algebrai azonosság kell, hogy legyen.

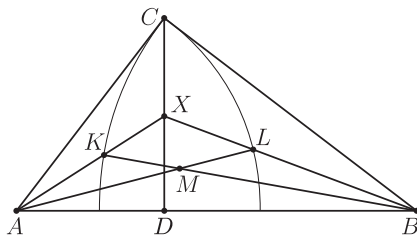
Kör és egyenes, illetve két kör metszéspontjának kiszámításához másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Az eredmény egy gyökös kifejezés lesz: a metszéspont koordinátáiban megjelenik egy kellemetlen négyzetgyök (a másodfokú egyenlet két gyökének különbsége), amit azután magunkkal kell cipelnünk. A megoldás végén egy négyzetgyökös azonosságot kell ellenőriznünk. Itt jön a lényeg. Tapasztalhattuk, hogy a négyzetgyökös azonosságok többnyire akkor is igazak maradnak, ha a pozitív négyzetgyök helyett a negatívát vesszük; ezért a legtöbb esetben a *bizonyítandó állítás a másik metszésponttal is igaz*. Az is előfordul, hogy egy feladaton belül több ilyen metszéspontpár is szerepel; ilyenkor a bizonyítandó állításnak még több példányát fedezhetjük fel az ábrában.

A Viète-formulák egyszerű összefüggéseket biztosítanak egy másodfokú egyenlet gyökei között; a geometriai ábránkban ezeknek a metszéspontpárok közötti geometriai kapcsolatok felelnek meg. Úgy is mondhatjuk, hogy a feladat által leírt alakzat csupán része egy nagyobb ábrának, és a nagyobb ábráról, ahol a másik metszéspontot is felvesszük, több geometriai összefüggést olvashatunk le. Természetesen a nagyobb ábra még nem jelenti azt, hogy a megoldás innen kezdve automatikus, de több esélyünk van meglátni a megoldást, mintha az ábrának csak egy kicsi részletében keresgélünk.

1. feladat (IMO 2012/5).

Legyen az ABC háromszögben $\angle BCA = 90^\circ$, és legyen D a C -ből induló magasságvonal talppontja. Legyen X a CD szakasz belső pontja. Legyen K az AX szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$. Hasonlóan, legyen L a BX szakasznak az a pontja, amire $AL = AC$. Legyen M az AL és BK egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.

Mit is jelent az a mondat, hogy „Legyen K az AX szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$ ”? Hogy szerkesztenénk meg a K pontot? Egyszerű: az AX szakaszt elmetsszük a B középpontú, C -n átmenő k_B körrel. Hasonlóan, az L pont a BX szakasz és az A középpontú, C -n átmenő k_A kör metszéspontja.

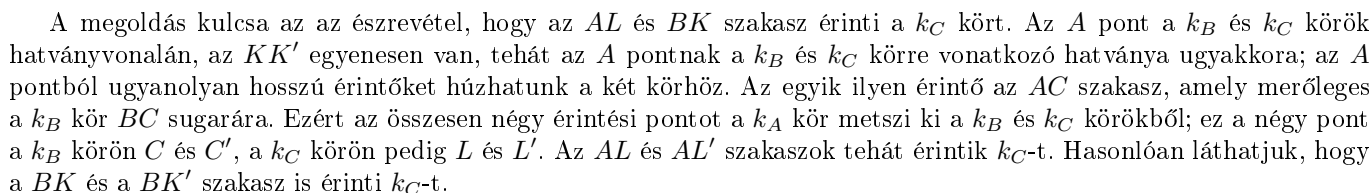


Most keressük elő a tarisznyánkból az otthonról hozott hamuban sült Jótanácsot, és alkalmazzuk. Az AX egyenes két pontban metszi a k_B kört, az egyik a már ismert K pont; a másikat jelöljük K' -vel. Hasonlóan, a BX egyenes kétszer metszi a k_A kört; az egyik metszéspont az L ; a másikat jelölje L' . Végül, a k_A és a k_B kör is kétszer metszi egymást; az egyik metszéspont C ; a másik a C tükörképe az AB egyenesre; legyen ez C' .

Az X pontnak a k_B és a k_A körre vonatkozó hatványa

$$XK \cdot XK' = XC \cdot XC' = XL \cdot XL',$$

ebből pedig láthatjuk, hogy a K, K', L, L' pontok egy körön vannak; jelöljük ezt a kört k_C -vel.



Ha maradéktalanul végre akarjuk hajtani a Jótanácsot, akkor megrajzoljuk az AL' és BK' egyenesek további metszéspontjait is; az ábrán ezeket jelöli M_1 , M_2 és M_3 . A bizonyítandó állításnak összesen négy példányát találhatjuk meg az ábrában:

2. feladat (IMO 2015/3).¹

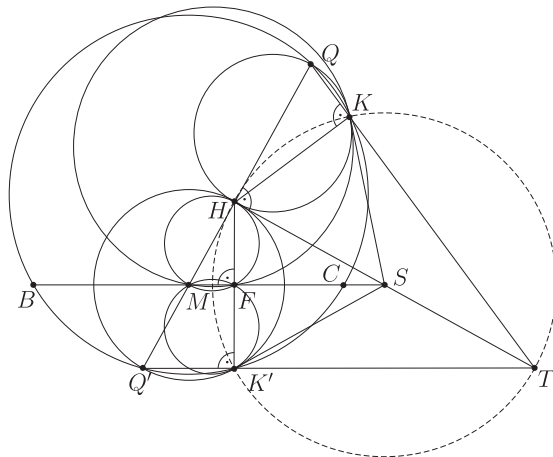
Bizonyítsuk be, hogy a KQH és FKM háromszögek körülírt körei érintik egymást.

A megoldás első lépése egy egyszerű észrevétel: a Q pont az MH félegyenesen van. Jól ismert, hogy egy háromszög magasságpontjának az oldalegyenesekre, illetve az oldalak felezőpontjaira vonatkozó tükröképei a körülírt körön vannak, utóbbiak a körülírt körön a csúcsokkal átellenes pontok. Legyen H tükröképe a BC egyenesre K' , az M pontra Q' . (Hogy miért ilyen furcsán jelöljük ezt a két pontot, rövidesen kiderül.) Ekkor tehát AQ' a körnek átmérője. Mivel $AQH \triangleleft$ derékszög, a Thalész-tétel megfordítása miatt a QH egyenes átmegy a kör A -val átellenes pontján, Q' -n. Tehát a HQ egyenes tartalmazza a HQ' szakaszt és annak felezőpontját, M -et. Ebből láthatjuk, hogy a Q, H, M, Q' pontok, ebben a sorrendben, egy egyenesen vannak.



¹ Az idei olimpiai feladatok megoldását a 386–395. oldalakon közöljük.

Most alkalmazzuk a Jótanácsot. A Q pont a körülírt kör és az MH egyenes egyik metszéspontja; a másik metszéspont Q' . Mi történne, ha a Q pont helyett a Q' ponttal kellene megoldanunk a feladatot? Először is észrevehetjük, hogy a K pont helyett a K' pontot kell használnunk: ez az a pont a körön, amire $Q'K'H \angle = 90^\circ$. Mivel $Q'K'H \angle = 90^\circ$, a $K'Q'H$ kör középpontja az M pont; az MK' szakasz ennek a körnek egy sugara. Hasonlóan, mivel $K'FM \angle = 90^\circ$, az $FK'M$ körnek $K'M$ egy átmérője. Így a $K'Q'H$ és az $FK'M$ kör középpontja is az MK' egyenesre esik, a két kör a K' pontban érinti egymást. Ha tehát a feladatban a Q pontot kicseréljük a Q' pontra, egy könnyen ellenőrizhető állítást kapunk.



Tekintsük most a háromszög körülírt körét, a HQK kört és $HQ'K'$ kört, valamint ezek páronként vett hatványvonalait. A HQK körben HQ , a $HQ'K'$ körben HQ' átmérő és Q, H, Q' egy egyenesen vannak. Ezért a HQK és a $HQ'K'$ körök érintik egymást. Tehát a három kör páronként vett hatványvonalai a metszéspontokat összekötő QK , illetve a $Q'K'$ egyenesek, valamint a HQK és $HQ'K'$ körök belső közös érintője, az MH egyenesre H -ban állított merőleges. Ezek egy ponton, a három kör hatványpontján mennek át; jelöljük ezt T -vel. A K -nál és K' -nél levő derékszögek miatt $HK'TK$ húrnégyszög, a köré írt körben HT átmérő. Legyen most S a $HK'TK$ kör középpontja, ami nem más, mint a HT szakasz felezőpontja; ekkor tehát $SH = SK = SK' = ST$. A HK' húr felező merőlegese, a $BMFC$ egyenes is átmegy S -en, a kör középpontján.

Az SH szakasz érinti a HKQ és a $HK'Q'$ kört is. Mivel pedig $SH = SK = SK'$, az SK szakasz a K pontban érinti a HKQ kört, az SK' szakasz pedig K' -ben érinti a $HK'Q'$ kört. Az S pontnak a HMF körre vonatkozó hatványa $SM \cdot SF = SH^2 = SK^2$; ebből következik, hogy az FKM kör a K pontban érinti az SK szakaszt. Az SK szakaszt tehát az FKM kör és a HKQ kör is érinti a K pontban; a két kör tehát egymást is érinti.