

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

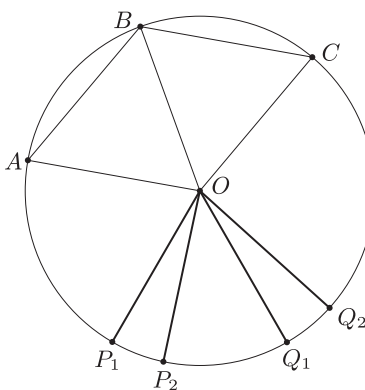
1. *A sík pontjainak egy véges S halmazát kiegyensúlyozottnak nevezzük, ha S bármely két különböző A, B pontjához van S -nek olyan C pontja, amire $AC = BC$. S -et centrum-nélkülinek nevezzük, ha S bármely három páronként különböző A, B, C pontjára teljesül az, hogy nincs S -nek olyan P pontja, amire $PA = PB = PC$.*

(a) *Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 3$ egész számhoz létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.*

(b) *Határozzuk meg azokat az $n \geq 3$ egészeket, amelyekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.*

Di Giovanni Márk megoldása. a) Ha n páratlan, akkor tekintsünk egy szabályos n -szöget és lássuk be, hogy ez egy kiegyensúlyozott halmaz. Ehhez tekintsünk két tetszőleges, különböző A és B pontot és a távolságukat ívhosszban mérve (a sokszög körülírt köre mentén). Ekkor a két távolság (a hosszabb és rövidebb ív mentén) összege n , azaz páratlan, ezért az egyik távolság páratlan a másik pedig páros. Ha viszont az egyik ív hossza páros, akkor S tartalmazza az ívfelezőpontot, ami ugyanakkora távolságra van A -tól és B -től.

Ha n páros, akkor tekintsünk egy kört és S legyen a következő pontok halmaza: a kör O középpontja és a kör kerületének néhány pontja az *ábra* szerint: A, B, C úgy, hogy $ABCO$ rombusz legyen, továbbá tetszőleges k darab pont $(P_1, P_2, \dots, P_k)$, illetve ezen pontok O körüli 60° -os pozitív iránybeli elforgatottja $(Q_1, Q_2, \dots, Q_k)$.



Nyilván megválaszthatjuk a P_i -pontokat úgy, hogy az összes általunk kiválasztott pont különböző legyen. Ekkor S -nek pontosan $2k + 4$ darab eleme van (ahol k tetszőleges nemnegatív egész). Tekintsünk most két különböző S -beli pontot. Ha mindkettő a kör kerületén van, akkor a kör középpontja egyenlő távol van tőlük. Ha az egyik a kör középpontja, akkor mivel A, B -nek, B, C -nek, illetve Q_i, P_i -nek a 60° -os elforgatottja, ezért a szabályos háromszögek miatt azonnal találunk olyan pontot, ami a két kiválasztott ponttól egyenlő távolságra van. Ezzel beláttuk, hogy S kiegyensúlyozott. Továbbá $2k + 4$ felveszi az összes 3-nál nagyobb páros számot.

Tehát minden $n \geq 3$ egészre létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.

b) Azt állítjuk, hogy pontosan a páratlan n -ekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

Ha n páratlan, akkor a szabályos n -szög kiegyensúlyozott halmaz (ezt már korábban beláttuk), továbbá bármely három pontját is választjuk ki, az a pont, amely mindhármuktól egyenlő távolságra van, éppen a körülírt körök középpontja, ami nyilván megegyezik a szabályos n -szög körülírt körének középpontjával. Ez a pont viszont nem S -beli, tehát S centrum-nélküli.

Lássuk most be, hogy páros n -re nem létezik ilyen S halmaz. Legyen $n = 2k$ és tegyük fel indirekt, hogy találtunk ilyen S -et. Ekkor egy tetszőleges A csúchoz legfeljebb $k - 1$ darab S -beli pontpár található úgy, hogy A rajta legyen a felezőmerőlegesükön, mert ha létezne k ilyen pár, akkor a $2k - 1$ csúcs közül lenne olyan B pont, amihez tartozó két felezőmerőleges is rajta lenne az A pont. Tekintsük ezen felezőmerőlegeseket meghatározó szakaszokat: BC -t és BD -t. Ekkor $AB = AC$ és $AB = AD$ -ből $AB = AC = AD$ következik, tehát S -nek van centruma, ami ellentmond eredeti feltevésünknek. Tehát S -nek minden csúcsa legfeljebb $k - 1$ darab különböző S -beli pontpár által meghatározott felezőmerőlegeseken lehet rajta. Viszont összesen $\binom{2k}{2} = k(2k - 1)$ darab pontpár van, amelyek mindegyikéhez tartozik egy felezőmerőleges, továbbá minden pontpár által meghatározott felezőmerőlegeseken van legalább egy darab S -beli pont.

Tehát $k(2k - 1) \leq 2k(k - 1)$, azaz $k \geq 2k$, ami nyilvánvalóan ellentmondás. Így páros n -re nincsen kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

Összefoglalva: pontosan a páratlan n -ekre létezik kiegyensúlyozott, centrum-nélküli S halmaz.

2. Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokból álló (a, b, c) számhármásokat, amelyekre az

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

számok mindegyike 2-hatvány.

(2-hatvány egy 2^n alakú egész szám, ahol n egy nemnegatív egész szám.)

Szabó Barnabás megoldása. A szokásos módon $v_2(x)$ jelöli egy x pozitív egész prímfelbontásában a 2 hatványkitevőjét. A továbbiakban hivatkozás nélkül fel fogjuk használni azt az ismert állítást, mely szerint $v_2(x) > v_2(y)$ esetén $v_2(x \pm y) = v_2(y)$, és $v_2(x) = v_2(y) = t$ esetén $v_2(x \pm y) \geq t + 1$. Ha $a = 1$, akkor $ab - c$ és $ac - b$ közül az egyik nem pozitív, így nem lehet 2-hatvány. Tehát $a \neq 1$, hasonlóan $b, c \neq 1$.

1. eset: minden változó páros. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $v_2(a) \geq v_2(b) \geq v_2(c) \geq 1$. Ekkor $v_2(ab - c) = v_2(c)$, de $ab - c$ 2-hatvány, így $ab - c \leq c$, azaz $ab \leq 2c$. A $v_2(ac - b) = v_2(b)$ egyenlőségből kapjuk, hogy $ac \leq 2b$. A két egyenlőtlenséget összeszorozva nyerjük, hogy $a \leq 2$, de $a \neq 1$, így $a = 2$. Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy $2b \leq 2c$ és $2c \leq 2b$, azaz $b = c$, viszont ekkor $v_2(bc - a) = v_2(b^2 - 2) = 1$, tehát $b^2 - 2 = 2^1$ lesz, ahonnan $b = c = 2$. Az első eset tehát az $(a, b, c) = (2, 2, 2)$ számhármast adja, ami valóban megfelelő.

2. eset: egyik változó páratlan. Feltehető, hogy c lesz páratlan. Tegyük fel, hogy $v_2(a) \neq v_2(b)$, mondjuk $v_2(a) > v_2(b)$. Ekkor a páros, tehát $ab - c$ páratlan, azaz $ab - c = 1$. Másrészt, $v_2(bc - a) = v_2(b)$, így $bc - a = 2^{v_2(b)}$ osztója b -nek, $bc - a \leq b$. Ekkor $ab - 1 = c \leq \frac{b+a}{b} \leq 1 + a$, ahonnan $a(b-1) \leq 2$, így $a = 2$ és $b = 2$, ami ellentmond $v_2(a) > v_2(b)$ -nek.

Tehát $t = v_2(a) = v_2(b)$. Először tegyük fel, hogy $t \geq 1$. Ekkor $2|ab$, így $ab - c = 1$. A c -t behelyettesítve

$$\begin{aligned} bc - a &= ab^2 - (a + b) = 2^x, \\ ca - b &= a^2b - (a + b) = 2^y, \end{aligned}$$

ahol feltehető, hogy $x \leq y$. A kettőt kivonva, $2^x(2^{y-x} - 1) = ab(a - b)$ adódik. Hogyha $x = y$, akkor $a = b$ lesz, és $a^3 - 2a = a(a^2 - 2) = 2^x$. Mivel a páros, $v_2(a^2 - 2) = 1$, így $a^2 - 2 = 2^1$, $a = 2$ adódik. Ebből kapjuk a $(3, 2, 2)$ számhármast.

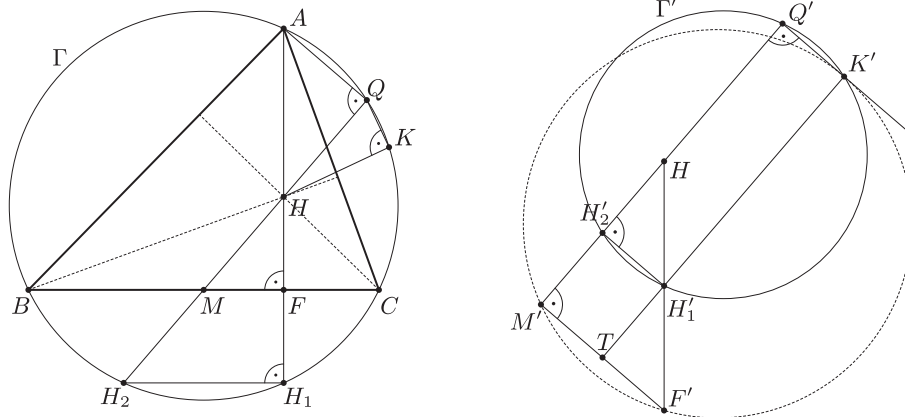
Ha $x < y$, akkor $2^x(2^{y-x} - 1) = ab(a - b)$ miatt $v_2(ab(a - b)) = x$, de $v_2(a - b) \geq t + 1$, így $x \geq 3t + 1$. Ebből $v_2(ab^2 - (a + b)) = x \geq 3t + 1$, de $v_2(ab^2) = 3t$ miatt $v_2(a + b) = 3t$. Másrészt $3t > t + 1$ miatt $v_2(a - b) = v_2(2a - (a + b)) = t + 1$, azaz $x = v_2(ab(a - b)) = 3t + 1$. Legyen $ab^2 = 2^{3t}d$ és $a + b = 2^{3t}e$, ekkor az egyenletbe helyettesítve és 2^{3t} -vel osztva $d - e = 2$, tehát $\frac{d}{e} \leq 3$, ezért $ab^2 \leq 3(a + b)$. Ebből $b \geq 2$ miatt $a \leq \frac{3}{b^2}a + \frac{3}{b} \leq \frac{3}{4}a + \frac{3}{2}$, ahonnan $a \leq 6$. Ha $a = 2$, akkor $2b^2 \leq 6 + 3b$, innen $b = 2$ (hiszen $v_2(b) = 1$), innen ismét kapjuk a $(3, 2, 2)$ számhármast. Hasonló vizsgálattal adódik, hogy $a = 4$ esetén nincs megoldás, míg $a = 6$ esetén kapjuk a $(2, 6, 11)$ hármast.

Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor $t = 0$, azaz mindhárom szám páratlan. Legyen $bc - a = 2^x$, $ca - b = 2^y$, $ab - c = 2^z$. Feltehető, hogy $x \leq y \leq z$. Ekkor $2^y | (ab - c) - (ac - b) = (b - c)(a + 1)$ és $2^y | (ab - c) + (ac - b) = (b + c)(a - 1)$. Nyilván $v_2(b - c) = 1$ vagy $v_2(b + c) = 1$, innen $a \geq 2^{y-1} - 1$. Viszont $(a + b)(c - 1) = 2^x + 2^y \leq 2^{y+1}$, de $a + b \geq 2^{y-1}$, tehát $c \leq 5$. $c = 5$ esetén $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát csak $c = 3$ lehetséges. Mivel $b > 1$, így $a < 2^y - 1$ tehát $a = 2^{y-1} + 1$ vagy $a = 2^{y-1} - 1$. Az előbbi esetből egyszerű számolás után ellentmondásra jutunk, míg az utóbbitól a $(3, 5, 7)$ megoldást kapjuk, ami valóban jó. A megoldások tehát: $(2, 2, 2)$, $(3, 2, 2)$, $(2, 6, 11)$ és $(3, 5, 7)$ és persze ezek permutációi.

3. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amiben $AB > AC$. Legyen Γ ezen háromszög körülírt köre, H a magasságpontja és F az A -ból kiinduló magasság talppontja. Legyen M a BC szakasz felezőpontja. Legyen Q Γ -nak az a pontja, amire $HQA \angle = 90^\circ$, és K Γ -nak az a pontja, amire $HKQ \angle = 90^\circ$. Feltesszük, hogy az A, B, C, K, Q pontok mind különbözőek, és ilyen sorrendben követik egymást a Γ körön.

Bizonyítsuk be, hogy a KQH és FKM háromszögek körülírt körrei érintik egymást.

Janzer Barnabás megoldása. Legyen a H pont tükröképe a BC egyenesre (vagyis az F pontra) H_1 , az M pontra H_2 . Ismert, hogy H_1 és H_2 a Γ körön vannak, továbbá H_2 az A -val átellenes pont. A Thalész-tétel megfordításából a QH egyenes Γ -t az A -val átellenes pontban, vagyis H_2 -ben metszi. Ezért HQ és HM is átmegy H_2 -n, vagyis H_2, M, H és Q egy egyenesen vannak. Az A, H és H_1 pontok egy egyenesen vannak, ezért a Thalész-tételből $H_2H_1H \angle = 90^\circ$. Az A, B, C pontokra a továbbiakban nincs szükségünk a megoldás során.



Invertáljunk H középponttal. Ekkor M', H_2', H, Q' ilyen sorrendben egy egyenesen vannak. HQ Thalész-köre (melyen K rajta van) egy $M'Q'$ -re merőleges egyenesbe megy át (hiszen középpontja rajta van a H_2MHQ egyenesen). Hasonlóan HM és HH_2 Thalész-körének képe is egy $M'Q'$ -re merőleges egyenes, előbbi körön F , utóbbin H_1 rajta van. Továbbá H_2' és H_1' rendre a HM' és HF' szakasz felezőpontja. Γ' egy kör, mely áthalad a Q', H_2', H_1', K' pontokon.

$Q'H_2'H_1'K'$ négyszög derékszögű trapéz és húrnégyszög egyben, ezért téglalap. Messe $K'H_1'$ egyenes $M'F'$ -t a T pontban. $M'F'H$ -ban $H_1'T$ középvonal, mivel H_1' felezőpont és $H_1'T$ párhuzamos HM' -vel. Ezért $TH_1'K'$ egyenes szakaszfelező merőlegese az $M'F'$ szakasznak, így a szimmetria miatt $M'F'K'$ körülírt köre érinti (az $M'F'$ -vel párhuzamos) $Q'K'$ egyenest. Így ősképek is érintik egymást, ami pont a bizonyítandó állítás.

4. Az ABC háromszög körülírt köre Ω , a körülírt kör középpontja O . Egy A középpontú Γ kör a BC szakaszt a D és E pontokban metszi, ahol B, D, E, C páronként különböző pontok, amelyek a BC egyenesen ebben a sorrendben fekszenek. Legyenek F és G a Γ és Ω körök metszéspontjai, ahol A, F, B, C, G ebben a sorrendben követik egymást az Ω körön. Legyen K a BDF háromszög körülírt körének és az AB szakasznak a másik metszéspontja. Legyen L a CGE háromszög körülírt körének és a CA szakasznak a másik metszéspontja.

Tegyük fel, hogy az FK és GL egyenesek különbözők és az X pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az X pont az AO egyenesen fekszik.

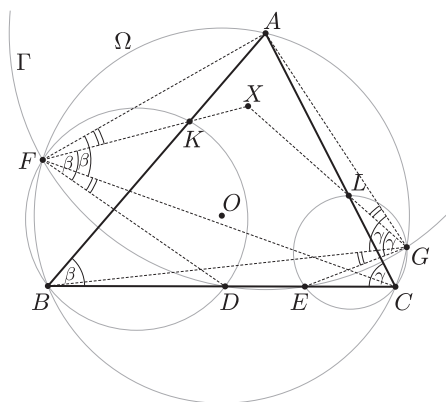
Baran Zsuzsanna megoldása. Először belátom, hogy $BGE\angle = DFC\angle$.

$BCF\angle (= DCF\angle) = BGF\angle$, mert Ω körnek azonos ívén nyugvó kerületi szögek.

Az FCD háromszögben $DFC\angle + DCF\angle + FDC\angle = 180^\circ$.

Mivel $FDEG$ húrnégyszög, az is igaz, hogy $FDE\angle + FGE\angle = FDE\angle + BGF\angle + BGE\angle = 180^\circ$.

Ezek szerint $DFC\angle = 180^\circ - DCF\angle - FDC\angle = 180^\circ - BGF\angle - FDE\angle = BGE\angle$.



A kerületi szögek tétele miatt az is igaz, hogy

$$\begin{aligned}
 DFK\angle &= DBK\angle \text{ (BDK kör DK ívén nyugszanak)} = \\
 &= CBA\angle = CFA\angle \text{ (}\Omega \text{ AC ívén nyugszanak)}, \\
 EGL\angle &= ECL\angle \text{ (CEL kör EL ívén nyugszanak)} = \\
 &= BCA\angle = BGA\angle \text{ (}\Omega \text{ AB ívén nyugszanak)}. \\
 AFK\angle &= AFD\angle - DFK\angle = AFD\angle - CFA\angle = DFC\angle = \\
 &= BGE\angle = AGE\angle - BGA\angle = AGE\angle - EGL\angle = AGL\angle.
 \end{aligned}$$

Ezek szerint $AFX \triangleleft = AFK \triangleleft = AGL \triangleleft = AGX \triangleleft$.

Az AFG háromszög egyenlőszárú (AF és AG egyaránt Γ sugarai), ezért $AFG \triangleleft = AGF \triangleleft$ és A illeszkedik az FG szakasz felezőmerőlegesére.

$OF = OG$ (O sugarai), ezért O is illeszkedik az FG szakasz felezőmerőlegesére. Így az AO egyenes az FG szakasz felezőmerőlegesére.

$$XFG \triangleleft = |AFG \triangleleft - AFX \triangleleft| = |AGF \triangleleft - AGX \triangleleft| = XGF \triangleleft.$$

Ezek szerint az XFG háromszög egyenlőszárú, így az X pont illeszkedik az FG szakasz felezőmerőlegesére, azaz az AO egyenesre. Ezt akartuk belátni.

Mivel a feladatban megadták, hogy a pontok milyen sorrendben helyezkednek el a BC szakaszon, illetve az Ω körön, diszkusszióra nincs szükség.

5. Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül

$$(1) \quad f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

minden x, y valós számra.

Williams Kada megoldása. Mindenekelőtt keressük meg (1) lineáris megoldásait, vagyis az $f(x) = ax + b$ alakúakat! Beírva (1)-be, majd kibontva és átrendezve:

$$\begin{aligned} a(x + a(x + y) + b) + b + axy + b &= x + a(x + y) + b + y(ax + b), \\ (*) \quad (a^2 - 1)x + (a^2 - a - b)y + (ab + b) &= 0. \end{aligned}$$

Meggondolható, hogy ez éppen akkor állhat fenn minden x, y -ra, hogyha (*)-ban mindhárom együttható nulla, ami csak akkor lehet igaz, ha $(a, b) = (1, 0)$ vagy $(-1, 2)$, azaz $f(x) = x$ vagy $f(x) = 2 - x$. Ennek a meggondolása nem tartozik a megoldáshoz, viszont ebből sejthető meg, hogy ez a kettő lesz (1)-nek az összes megoldása. Jól látható, hogy ezekenél (*) együtthatói tényleg mind nullák lesznek, vagyis hogy $f(x) = x$ és $f(x) = 2 - x$ valóban megoldása (1)-nek.

Helyettesítsünk $x = 0$ -t, majd pedig $y = 1$ -et (1)-be, nyerjük:

$$\begin{aligned} (2) \quad & f(f(y)) + f(0) = f(y) + yf(0), \\ (3) \quad & f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1). \end{aligned}$$

Kezdeképpen könnyű megtalálni $f(0)$ lehetséges értékeit: írjunk (2)-be előbb $y = 0$ -t: $f(f(0)) = 0$ adódik, amiért (2)-be most $y = f(0)$ -t helyettesítve

$$f(f(f(0))) + f(0) = f(f(0)) + f(0)^2,$$

azaz $2f(0) = f(0)^2$ adódik, ahonnan $f(0) = 2$ vagy $f(0) = 0$.

1. eset: $f(0) = 2$, itt az $f(x) = 2 - x$ megoldást várjuk.

Ez az eset egy trükkös észrevétellel elintézhető. Figyeljük meg ugyanis, hogy (3) szerint $x + f(x + 1)$ minden x -re fixpontja f -nek. Ellenben a megcélzott $x \mapsto 2 - x$ függvénynek csak az 1 a fixpontja. Ha belátnánk, hogy $f(0) = 2$ esetén f -nek csak az 1 lehet fixpontja, abból következne, hogy $x + f(x + 1)$ fixpont lévén minden x -re, azonosan 1 kell legyen, vagyis $f(x + 1) = 1 - x$ minden x -re, azaz $f(t) = 2 - t$ bármely t -re ($t := x + 1$).

Belátjuk tehát, hogy $f(0) = 2$ -re $f(a) = a$ -ból $a = 1$ következik. Ehhez (2)-t vegyük szemügyre, $y = a$ -t helyettesítve: $f(f(a)) + 2 = f(a) + 2a$, $a = 1$ adódik. Ez igazolja, hogy $f(0) = 2$ esetén $f(x) = 2 - x$.

2. eset: $f(0) = 0$, itt az $f(x) = x$ megoldást várjuk.

Ezúttal bonyolultabban járunk el: azt vesszük észre, hogy ha (1)-be x, y helyett $-x, -y$ -t helyettesítünk, azzal $f(xy)$ ugyanúgy jelen marad, és ezért kiejthetjük:

$$\begin{aligned} f(xy) &= -f(x + f(x + y)) + (x + f(x + y)) + yf(x) \\ f(xy) &= -f(-x + f(-x - y)) + (-x + f(-x - y)) - yf(-x). \end{aligned}$$

Itt gyakran üti fel fejét $x + y$ és ellentettje, kényelmesebb az $y := k - x$ jelölést használni:

$$\begin{aligned} (4) \quad & -f(x + f(k)) + (x + f(k)) + (k - x)f(x) = \\ & = -f(-x + f(-k)) + (-x + f(-k)) - (k - x)f(-x). \end{aligned}$$

A megoldáshoz először meghatározunk néhány $f(\pm k)$ értéket, majd pedig az adódó összefüggéseket összehasonlítjuk, amikből már némi munka árán kifejezhetjük $f(x)$ -et.

Már tudjuk, hogy $f(0) = 0$, írjunk hát (4)-be $k = 0$ -t, rögtön barátságosabb lesz:

$$\begin{aligned} (5) \quad & -f(x) + x - xf(x) = -f(-x) - x + xf(-x), \\ & 2x = (x + 1)f(x) + (x - 1)f(-x). \end{aligned}$$

Ha (3)-ba $x = -1$ -et írunk, akkor $f(0) = 0$ miatt $f(-1) = -1$ nyerhető, illetve (5)-be $x = 1$ -et írva, megkapjuk, hogy $2 = 2f(1)$, $f(1) = 1$. Vagyis (4)-be már írhatunk $k = 1$ -et is:

$$-f(x+1) + (x+1) + (1-x)f(x) = -f(-x-1) - (x+1) - (1-x)f(-x).$$

Itt viszont (5) szerint $-(1-x)f(-x)$ helyére $2x - (x+1)f(x)$ írható, vagyis

$$\begin{aligned} -f(x+1) + 2(x+1) &= (x-1)f(x) - f(-x-1) + 2x - (x+1)f(x), \\ 2 + 2f(x) &= f(x+1) - f(-x-1). \end{aligned}$$

Ha ezt x helyett $x-1$ -re írjuk fel, akkor

$$(6) \quad 2 + 2f(x-1) = f(x) - f(-x)$$

adódik.

Beszorozva (6)-ot $(x-1)$ -gyel, majd hozzáadva (5)-öt:

$$(7) \quad \begin{aligned} 2(x-1) + 2(x-1)f(x-1) + 2x &= (x-1)f(x) + (x+1)f(x), \\ (x-1)f(x-1) + (2x-1) &= xf(x). \end{aligned}$$

Ezután (6)-ba $x = -1$ -et írva, $f(-2) = -2$, majd pedig (6)-ba $x = 2$ -t írva, $f(2) = 2$ nyerhető.

A befejezéshez írjunk (4)-be $k = 2$ -t:

$$-f(x+2) + (x+2) + (2-x)f(x) = -f(-x-2) + (-x-2) - (2-x)f(-x),$$

ahol $f(x+2) - f(-x-2) = 2 + 2f(x+1)$ érvényes (6) szerint, így

$$2(x+2) + (2-x) \cdot (f(x) + f(-x)) = 2 + 2f(x+1).$$

Beszorozva $(x+1)$ -gyel, (7) miatt adódik:

$$\begin{aligned} 2(x+2)(x+1) - (x-2)(x+1) \cdot (f(x) + f(-x)) &= 2(x+1) + 2(xf(x) + 2x+1), \\ 2(x^2 + 3x + 2) - 2(x+1) - 2(2x+1) &= (x^2 - x - 2)(f(x) + f(-x)) + 2xf(x), \\ 2x^2 &= (x^2 + x - 2)f(x) + (x^2 - x - 2)f(-x). \end{aligned}$$

Ezt pedig $(x-1)$ -gyel tovább szorozva és (5)-öt használva:

$$\begin{aligned} 2x^2(x-1) &= (x-1)(x^2 + x - 2)f(x) + (x^2 - x - 2)(2x - (x+1)f(x)), \\ 2x^2(x-1) - 2x(x^2 - x - 2) &= [(x-1)(x^2 + x - 2) - (x+1)(x^2 - x - 2)]f(x), \\ 2x(x^2 - x - (x^2 - x - 2)) &= \\ = [x((x^2 + x - 2) - (x^2 - x - 2)) - ((x^2 + x - 2) + (x^2 - x - 2))]f(x), \\ 4x &= [x \cdot (2x) - (2x^2 - 4)]f(x), \end{aligned}$$

amiből már világos, hogy $f(x) = x$, bármely x -re.

Tehát két megoldásunk van: $f(x) = x$ és $f(x) = 2 - x$, és ezeket már leellenőriztük.

6. Egész számok egy $a_1, a_2, \dots$ sorozata rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ minden $j \geq 1$ -re;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ minden $1 \leq k < \ell$ -re.

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pozitív egész: b és N , hogy

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

teljesül minden olyan m és n egész számra, amire fennáll $n > m \geq N$.

Fehér Zsombor megoldása. Legyen $c_j = a_j + j$. Ekkor az (i) feltétel azt mondja ki, hogy $j+1 \leq c_j \leq j+2015$, a (ii) feltétel pedig azt, hogy a c_j számok mind különbözőek.

Megmutatjuk, hogy a $c_1, c_2, \dots$ sorozat véges sok kivétellel minden pozitív egész számot felvesz. Tegyük fel ugyanis, hogy legalább 2016-ot nem vesz fel, és legyen t egy olyan pozitív egész, ami nagyobb ennél a 2016 számnál. Ekkor az (i) feltétel alapján a $\{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ halmaz minden eleme az $[1, t+2015]$ intervallumba esik, és mivel (ii) szerint t különböző elemről van szó, ezért ebből az intervallumból $\{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ éppen 2015 pozitív egész számot nem vesz

fel. Azonban feltevésünk szerint az ennél bővebb $\{c_1, c_2, \dots\}$ halmaz legalább 2016 darab t -nél kisebb pozitív egész számot nem vesz fel, ami pedig ellentmondás.

A feladatnak megfelelő b számot válasszuk meg annyinak, amennyi a $c_1, c_2, \dots$ sorozat által fel nem vett pozitív egészek száma, N pedig legyen egy olyan szám, ami nagyobb ennél a b darab kimaradó számnál. A fenti gondolatmenetből az is látható, hogy $b \leq 2015$. Az m, n pozitív egészekre a továbbiakban feltesszük, hogy $N \leq m < n$.

A feladatunk lényegében az, hogy egy $\sum a_j$ kifejezést megfelelő korlátok közé szorítsunk, ami nyilván ugyanaz, mint $\sum c_j$ megfelelő korlátok közé szorítása. Tudjuk, hogy $\{c_{m+1}, \dots, c_n\}$ minden eleme az $[m+2, n+2015]$ intervallumba esik, és mivel ezen intervallum $n - m + 2014$ egész számából $n - m$ van az előző halmazban, ezért 2014 egész szám marad ki. Vizsgáljuk meg közelebbről ezt a 2014 számot: ki fog derülni, hogy közülük $b - 1$ darab az $[m+2, n+2015]$ intervallum „elején”, $2015 - b$ pedig a „végén” helyezkedik el.

Mivel a $\{c_1, c_2, \dots\}$ halmaz b darab egész számot nem vesz fel az $[1, \infty)$ intervallumból, ezért a $\{c_{m+1}, c_{m+2}, \dots\}$ halmaz $b + m$ számot nem vesz fel $[1, \infty)$ -ből. Ez $c_j > j$ alapján azt jelenti, hogy a $\{c_{m+1}, c_{m+2}, \dots\}$ halmaz $b - 1$ számot nem vesz fel $[m+2, \infty)$ -ből. Mivel azonban $m+2 > N$, ezért ezen $b - 1$ számot is felveszi valahol a $c_1, c_2, \dots$ sorozat, csak még c_{m+1} előtt. Így ez a $b - 1$ szám mindegyike olyan c_k , melyre $k \leq m$, így $c_k \leq k + 2015 \leq m + 2015$ alapján ezek a számok mind az $[m+2, m+2015]$ intervallumba esnek.

Tehát azon 2014 egész közül, melyek az $[m+2, n+2015]$ intervallumban benne vannak, de a $\{c_{m+1}, \dots, c_n\}$ halmazban nem, $b - 1$ darab az $\{c_1, \dots, c_m\}$ halmazban van, a maradék $2015 - b$ darab pedig szükségképpen a $\{c_{n+1}, \dots\}$ halmazban. Ezen $2015 - b$ szám mindegyike legalább $n + 2$, így ezek az $[n+2, n+2015]$ intervallumba esnek.

Ezen a ponton álljunk meg egy pillanatra, és vegyük észre, hogy a feladat megoldásával lényegében készen vagyunk. Csak az alapján, hogy a 2014 kimaradó szám valahol az $[m+2, n+2015]$ intervallumban van, még nem tudnánk pontos becslést mondani, hiszen m, n -et kicsivel megváltoztatva az egyik kimaradó szám szabadon „átugorhatna” az intervallum elejétől a végére, ezzel nagy ($n - m$ nagyságrendű) változást eredményezve. De azáltal, hogy a 2014 kimaradó szám közül mindig $b - 1$ van az intervallum elején, és $2015 - b$ a végén (ahol a b egy univerzális paramétere a sorozatnak!), ilyen ugrások nem történhetnek meg, csak az intervallum szélein lévő rövid (2014 hosszú) intervallumok belsejében mozoghatnak a kimaradó számok. Így lehetséges az, hogy m, n -től független, 1007^2 nagyságrendű becslést fogunk tudni mondani.

Nem maradt más hátra, minthogy kiszámoljuk a 2014 kimaradó szám összegének lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét, majd ezt visszavezessük a feladatbeli összegre. Tudjuk, hogy a 2014 szám felbontható valahogy egy $b - 1$ és egy $2015 - b$ elemű csoportra, melyek elemei rendre az $[m+2, m+2015]$, illetve az $[n+2, n+2015]$ intervallumból valók. (Előfordulhat, hogy ez a két intervallum átfedi egymást, de ez nem okoz gondot.) Mivel a számok különbözőek, ezért a 2014 szám összege legalább

$$\begin{aligned} & ((m+2) + (m+3) + \dots + (m+b)) + \\ & + ((n+2) + (n+3) + \dots + (n+2016-b)) = \\ & = \frac{(b-1)(2m+b+2)}{2} + \frac{(2015-b)(2n+2018-b)}{2} = h_{\min}, \end{aligned}$$

legfeljebb pedig

$$\begin{aligned} & ((m+2017-b) + \dots + (m+2015)) + ((n+b+1) + \dots + (n+2015)) = \\ & = \frac{(b-1)(2m+4032-b)}{2} + \frac{(2015-b)(2n+2016+b)}{2} = h_{\max}. \end{aligned}$$

Ha H jelöli az előbbi 2014 kimaradó szám összegét, akkor a feladatban szereplő összeg így írható:

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) &= \sum_{j=m+1}^n (c_j - j - b) = \sum_{i=m+2}^{n+2015} i - H - \sum_{j=m+1}^n j - \sum_{j=m+1}^n b = \\ &= \frac{(n+2014-m)(n+m+2017)}{2} - H - \frac{(n-m)(n+m+1)}{2} - b(n-m). \end{aligned}$$

A $h_{\min} \leq H \leq h_{\max}$ becslést alkalmazva, a kifejezések egyszerűsítése után végül a következőt kapjuk:

$$b^2 - 2016b + 2015 \leq \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \leq -b^2 + 2016b - 2015.$$

Így tehát valóban,

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq -b^2 + 2016b - 2015 = 1007^2 - (b - 1008)^2 \leq 1007^2.$$