

I. rész

1. Egy közvélemény-kutatás kérdéseire az első hónapban 700 ember válaszolt, mindenki pontosan egyet választott a felkínált három lehetőségéből. A feleletek aránya 4 : 7 : 14 volt. Ezután még néhány ember részt vett a közvélemény-kutatásban, így a feleletek aránya 6 : 9 : 16 lett. Legkevesebb hány ember válaszolt utólag a kérdésekre? Ebben az esetben végül melyik lehetőséget hányan választották? (11 pont)

2. A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az A program 30%-kal több elektromos energiát, viszont 20%-kal kevesebb vizet használ, mint a B program. A B program 15%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ egy mosogatáshoz, mint a C program. Mindhárom program futtatásakor 50 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogatás az A programmal 165 Ft-ba, a B programmal 150 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül a C programmal egy mosogatás? (12 pont)

3. Hányféleképpen húzhatunk ki a 32 lapos magyar kártyából 6 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két piros, két zöld és két ász? (14 pont)

4. Egy kecske egy kerítéssel védett 10×3 m-es virágágy körüli, elegendően nagy réten legel. A kecskét 16 m hosszú kötéllal a kerítés 10 méteres oldalának felezőpontjánál levert cölöphöz kötötték. Mekkora területen legelheti le a füvet a kecske? Hányadrészére csökken ez a terület, ha a kötél hosszát 10 méterre csökkentik? (14 pont)

II. rész

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\log_4(4 \sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2 \operatorname{tg} x). \quad (16 \text{ pont})$$

6. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hatoslottó húzáson a 45 számból (visszatevés nélkül) 6-ot kihúzva, a hat lottószámot növekvő sorrendbe rakva egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk? (16 pont)

7. Milyen görbét ír le az $y = x^2 - 2(m - 3)x + m - 8$ parabola csúcsa, ha az m paraméter értéke végigfut a valós számok halmazán? Az m paraméter mely értékénél lesz a csúcs ordinátája maximális? Adjuk meg ebben az esetben a parabola $P(0; -5)$ ponton átmenő érintőinek egyenletét. (16 pont)

8. Az azonos tengerszint feletti magasságban fekvő Hencida és Boncida között a távolság 5 km. Hencidából egy közeli hegy csúcsa 30° -os, Boncidából pedig 11° -os szög alatt látszik. Hencidából a hegy csúcsát és Boncidát összekötő szakasz látószöge 120° -os.

a) Milyen magas a hegy?

b) A két várost összekötő szakasz felénél elindítanak egy távirányítással repülőgép modellt, ami végig a szakaszfelező merőleges síkjában mozog. Mennyire közelítheti meg repülés közben a hegy csúcsát? (16 pont)

9. János egy vízzel teli hordó aljára 4 mm átmérőjű lyukat fúrt és a kifolyó víz sebességét vizsgálta. A Bernoulli-egyenletből levezette, hogy $v = \sqrt{2gx}$, ahol x a vízszint pillanatnyi magassága. Megmérte, hogy a teli hordóból az első másodpercben $62,8 \text{ cm}^3$ víz folyt ki. (A sebességet itt állandónak vehetjük, a rövid mérési idő miatt.) Ezután megállapította, hogy 5 perc alatt pontosan 10 cm-rel csökkent a vízszint. Feltételezzük, hogy a vízszint exponenciálisan csökken az $x = h \cdot 2^{-t/T}$ függvény szerint, ahol h a kezdeti vízszint magassága, T pedig a hordóban lévő víz „felezési ideje”. A hordót üresnek tekinthetjük, ha már csak 1 cm magas a vízszint benne. A teli állapotból mennyi idő alatt ürül ki a hordó? (16 pont)