

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

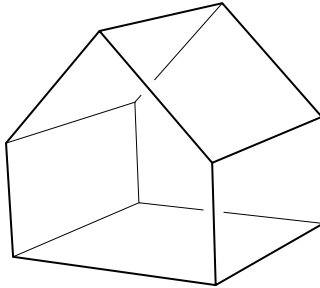
b) $\log_2 x + \log_4 x = 21.$

(11 pont)

2. a) Gábor 18. születésnapjára 18 vendég volt hivatalos. A vendégek mindegyike pontosan négy vendéget ismert. Az est folyamán minden vendég tombolasorsoláson vett részt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tombolasorsolás két nyertese ismeri egymást?

b) Hány csúcsa van annak a fagrafnak, amelybe 78 élt kell berajzolnunk, hogy teljes gráfot kapjunk? (12 pont)

3. A *vázlatrajz* egy házikóra hasonlító ötszögalapú egyenes hasáb vázlatát mutatja. Ezt a szemléltetőeszközt egy 12 cm élű bükkfakockából fűrészelték ki. A házikó hossza, szélessége, magassága 12 cm, a tető két síkja merőleges egymásra és egybevágó.



a) Mekkora a test felszíne?

b) Mennyivel lenne könnyebb ez a szemléltetőeszköz, ha lucfenyőből készítették volna?

(A bükkfa sűrűsége $0,68 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, a lucfenyő sűrűsége $0,43 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.)

(14 pont)

4. Két dobókockával 24-szer dobtunk. A dobott számok összege a következő gyakorisági táblázatot adta:

Dobott érték	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gyakoriság	0	1	2	4	5	7	3	1	1	0	0

a) Mutassuk meg, hogy a huszonötödik dobás értéke nem lehet olyan, hogy a dobások értékének számtani közepe, mediánja, módusza valamilyen sorrendben egy nem állandó számtani sorozat három egymást követő tagja legyen.

b) Az elméletileg számított valószínűségekhez képest melyiket mondhatjuk szélsőségesebbnek, azt hogy 7 darab 7-est, vagy azt, hogy csak 3 darab 8-ast dobtunk? (14 pont)

II. rész

5. Adott a koordináta-rendszerben az $A(-1;0)$, $B(1;0)$ pontpár, továbbá a C_n nemnegatív koordinátájú pontok, amelyekre $AC_n = BC_n = n$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Legyen $a_n = C_{n+1}C_n$.

a) Adjuk meg az $\{a_n\}$ sorozat első három tagját.

b) Igazoljuk, hogy $\{a_n\}$ szigorúan monoton csökkenő sorozat.

c) Mutassuk meg, hogy az $\{a_n\}$ sorozatnak az 1 alsó korlátja.

(16 pont)

6. a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ hozzárendeléssel adott függvényről tudjuk a következőket:

I. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{53}{12}.$

II. A -2 abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenlete: $y = 7x + 29.$

Adjuk meg $f(13)$ értékét.

b) Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ hozzárendeléssel adott függvénynek három zérushelye van. (16 pont)

7. a) A $K(4; 2)$ középpontú, $\sqrt{40}$ sugarú kör és az x tengely két metszéspontja legyen A és B . Az ABC háromszögben $AC = BC$, továbbá az ABC háromszög beírt körének középpontja K . Adjuk meg a C pont koordinátáit.

b) Az $y = x^2 - 2x - 3$ egyenletű parabola és az x tengely két metszéspontja legyen A és B . Az AB szakasz felezőpontját F -fel, a parabola tengelypontját T -vel jelöljük, a parabola A -ban és B -ben húzott érintők metszéspontját pedig C -vel. Mutassuk meg az egy egyenesre illeszkedő F , T , C pontokra, hogy T az FC szakasz felezőpontja. (16 pont)

8. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív x értéket, amelyre

a) $\lg x$ és $\lg 2x$ egy derékszögű háromszög befogói, $\lg 3x$ pedig az átfogója;

b) $\sin x$ és $\sin 2x$ egy derékszögű háromszög befogói, $\sin 3x$ pedig az átfogója.

(16 pont)

9. A magyar kártyában négy szín található (zöld, makk, tök, piros) és minden színhez nyolc figura tartozik (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász). Gyuri, Csaba és István ultiznak. Ezt a kártyajátékot magyar kártyával játsszák. Az osztás során mindenki tíz lapot kap, és két lap marad talonban.

a) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a talonba kerülő két lapon különböző figura lesz.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Gyuri megkapja mind a négy ászt?

c) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy Csabánál nem lesz VII-es lap.

d) Ha tudjuk, hogy István kapott legalább egy VII-es lapot az osztáskor, akkor számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy mind a négy VII-es hozzá kerül. (16 pont)