

I. rész

1. Számítsuk ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét:

$$a = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}},$$
$$b = (0,2^{-1} \cdot 3125^{0,4} - \sqrt[3]{64^2} - 1) : 27,$$
$$c = -4 \cdot \sin \frac{67\pi}{6} \cdot \lg 0,01.$$

(11 pont)

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{\cos^2 x + 4}{\sin^2 x - 4} = \frac{-3 \cos^2 x + 3 \sin x - 4}{\cos^2 x + 3}.$$

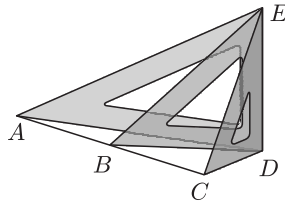
(12 pont)

3. Egy háromjegyű szám négyszereséhez 36-ot kell adnunk, hogy a számjegyeiből a fordított sorrendben alkotott háromjegyű számot kapjuk. Melyik volt az eredeti háromjegyű szám? (14 pont)

4. Csúcsainak koordinátaival adott egy háromszög: $A(1; 2)$, $B(13; 2)$, $C(5; 10)$. Számítással igazoljuk ebben a háromszögben, hogy az MK szakasz K ponthoz közelebbi harmadoló pontja az ABC háromszög S súlypontja lesz. (M a magasságpontot, K a háromszög köré írt kör középpontját jelöli.) (14 pont)

II. rész

5. Az ábrán látható építményt három derékszögű vonalzóból úgy raktuk össze, hogy az azonos hosszúságú befogóknál illeszkedjenek egymáshoz, a további befogók pedig az asztallapon legyenek.



A középső vonalzó egyenlő szárú, az egyik szélsőnek a hosszú, a másiknak a rövid befogója érintkezik az asztallappal. Az ábrán látható A , B és C pontok egy egyenesre illeszkednek, és $AB = BC = 8$ cm.

- a) Adjuk meg az ADE , BDE és CDE derékszögű háromszögek területének arányát.

- b) Milyen magasan van az asztallap fölött az E pont? (16 pont)

6. Tekintsük az $f(x) = x^2$ hozzárendelésű függvény grafikonjára illeszkedő, az

$$A_n(-n; f(-n)), \quad B_n(n; f(n)), \quad C_n(n+1; f(n+1)), \quad D_n(-n-1; f(-n-1))$$

pontok által meghatározott húrtrapézokat (n pozitív egész számot jelöl). Az $A_n B_n C_n D_n$ körülírt körének sugara legyen r_n .

- a) Adjuk meg az $r_1 + r_2 + r_3$ összeget.

- b) Határozzuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2}{n^3}$ határértéket. (16 pont)

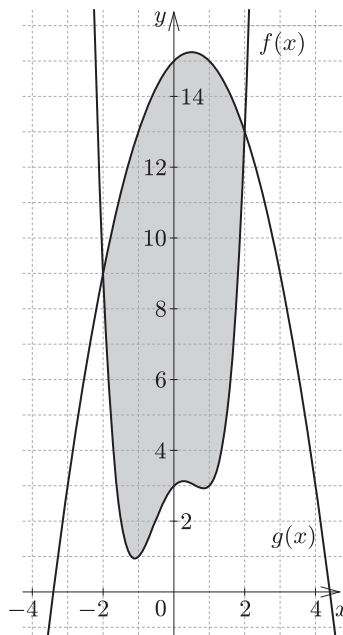
7. Egy terepasztalon az ábrán látható folt egy tó alakját mutatja. Ha ezt a síkidomot 1 cm egységű koordináta-rendszerbe helyezzük, akkor a határvonalát az

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3$$

és a

$$g(x) = -x^2 + x + 15$$

hozzárendeléssel adott függvények grafikonja adja.



a) Milyen messze van egymástól a grafikonok metszéspontja?

b) Mekkora a folt területe?

(16 pont)

8. Adjuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$\begin{cases} xy + x + y + 2 = 0, \\ x - p = y(px + 1) \end{cases}$$

egyenletrendszernek pontosan egy valós $(x; y)$ számpár legyen a megoldása.

(16 pont)

9. Az egységsugarú gömbbe olyan kúpot írunk, amelyben a tengely és az alkotó szöge α . Adjuk meg a kúp felszínét és térfogatát $\sin \alpha$ függvényében.

(16 pont)