

# Megoldásvázlatok a 2014/2. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

## I. rész

1. Péternek volt 84 000 Ft-ja, amit édesapja  $p\%$ -kal megnövelt. Ezt követően Péter a pénzének  $(p - 5)\%$ -ért könyveket vásárolt. Ekkor annyi pénze maradt, mint amennyi eredetileg volt. Mennyibe kerültek a könyvek? (11 pont)

**Megoldás.** Ha  $p\%$ -kal megnövekedett a pénze, akkor  $84\,000\left(1 + \frac{p}{100}\right)$  forintja lett. Ezt követően ennek az összegnek elköltötte a  $(p - 5)\%$ -át. Ekkor

$$84\,000 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{p-5}{100}\right)$$

forintja maradt, ami a szöveg szerint pontosan 84 000 Ft. Ezt felírhatjuk egyenletként:

$$\begin{aligned} 84\,000 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{p-5}{100}\right) &= 84\,000, \\ \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{p-5}{100}\right) &= 1. \end{aligned}$$

Végezzük el a beszorzást, majd rendezzük az egyenletet:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{p}{100} - \frac{p-5}{100} - \frac{p(p-5)}{10\,000} &= 1, \\ 100p - 100(p-5) - p(p-5) &= 0, \\ p^2 - 5p - 500 &= 0. \end{aligned}$$

A megoldóképlet segítségével kapjuk a gyököket:

$$\begin{aligned} p_{1;2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot (-500)}}{2} = \frac{5 \pm 45}{2}, \\ p_1 &= 25, \quad p_2 = -20. \end{aligned}$$

A feladat szövege szerint csak az első gyök jöhet szóba. Édesapja  $25\%$ -kal növelte a pénzét, azaz 21 000 Ft-tal. Ezt költötte el könyvekre.

Vagyis a könyvek 21 000 Ft-ba kerültek.

2. Milyen háromszög oldalaira teljesül az  $a^4 + 2b^2c^2 = b^4 + c^4$  összefüggés?

(12 pont)

**Megoldás.** Rendezzük az összefüggést 0-ra:

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4 &= 0, \\ a^4 - (b^4 - 2b^2c^2 + c^4) &= 0. \end{aligned}$$

A zárójelben lévő háromtagú kifejezés teljes négyzet:

$$a^4 - (b^2 - c^2)^2 = 0.$$

Ezt írhatjuk szorzatalakban is:

$$(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor 0, ha  $a^2 + c^2 = b^2$  vagy  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Vagyis a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint a háromszög biztosan derékszögű. (Az is kiderült, hogy vagy a  $b$ , vagy a  $c$  oldallal szemben van a háromszög derékszöge.)

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\begin{cases} \frac{14}{x+3y-5} - \frac{15}{x+y+2} = 4, \\ \frac{7}{x+3y} + \frac{9}{x+y} = 4. \end{cases} \quad (16 \text{ pont})$$

**Megoldás.** Egyik nevező sem lehet 0, ezért  $x + 3y \neq 5$ ,  $x + y \neq -2$ ,  $x + 3y \neq 0$ ,  $x + y \neq 0$ .

Vezessük be a következő új ismeretleneket:  $a = x + y$ ,  $b = x + 3y$ . Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \frac{14}{b-5} - \frac{15}{\frac{a+2}{7} + \frac{9}{a}} = 4, \\ \frac{7}{b} + \frac{9}{a} = 4. \end{cases}$$

Az első egyenletet  $(a+2)(b-5)$ -tel, a másodikat  $ab$ -vel szorozzuk:

$$\begin{cases} 14(a+2) - 15(b-5) = 4(a+2)(b-5), \\ 7a + 9b = 4ab. \end{cases}$$

A műveletek elvégzése és a rendezés után a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} 34a - 23b + 143 - 4ab = 0, \\ 7a + 9b = 4ab. \end{cases}$$

Az első egyenletben a  $4ab$  helyettesíthető  $(7a + 9b)$ -vel:

$$34a - 23b + 143 - (7a + 9b) = 0,$$

$$27a - 32b + 143 = 0,$$

$$a = \frac{32b - 143}{27}.$$

Ezt visszaírhatjuk az egyenletrendszer második egyenletének rendezett változatába:

$$7 \cdot \frac{32b - 143}{27} + 9b = 4 \cdot \frac{32b - 143}{27} \cdot b,$$

amit 27-tel szorozhatunk, majd a műveletek elvégzése után a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$128b^2 - 1039b + 1001 = 0.$$

Alkalmazzuk a megoldóképletet:

$$b_{1;2} = \frac{1039 \pm \sqrt{1039^2 - 4 \cdot 128 \cdot 1001}}{2 \cdot 128} = \frac{1039 \pm 753}{256},$$

$$b_1 = 7, \quad b_2 = \frac{143}{128}.$$

A feladat feltételei alapján  $b$ -nek is egésznek kell lenni, így  $b_2$  nem jöhet szóba. Behelyettesítéssel kapjuk:

$$a_1 = \frac{32 \cdot b_1 - 143}{27} = \frac{32 \cdot 7 - 143}{27} = 3.$$

Meghatároztuk az új ismeretlenek értékét, ezért most már felírhatjuk, hogy

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x + 3y = 7. \end{cases}$$

Ennek megoldása:  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

Ez a számpár minden feltételnek eleget tesz, így ez az eredeti egyenletrendszer megoldása.

**4.** Egy kiadó honlapján az olvasók szavazhattak arra, hogy szerintük mi volt 2013 legjellemzőbb szava. A játékosoknak három szót kellett ajánlani. László nagyon korán bekapcsolódott a játékba, és ekkor mindhárom szava felkerült a tízes listára. Az ekkori állást a következő táblázat mutatja:

| A szó              | szavazatok száma |
|--------------------|------------------|
| Rezsicsökkentés    | 36               |
| Okostelefon        | 25               |
| Táblagép           | 24               |
| Életpályamodell    | 21               |
| Kedvesem           | 16               |
| Nemzeti dohánybolt | 15               |
| Jobban teljesít    | 14               |
| Devizahitel        | 11               |
| Összefogás         | 10               |
| Remény             | 8                |

- a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy kitaláljuk az általa ajánlott három szót, ha tudjuk, hogy ekkor pontosan egy szava szerepelt a legjobb három között?
- b) Hányféle olyan ajánlás képzelhető el, amelynek mindhárom szava szerepel a listán?
- c) Hányféle olyan ajánlás képzelhető el, amelynek mindhárom szava szerepel a listán, de nincsenek szomszédosak közöttük? (14 pont)

**Megoldás.** a) Az egyik szava a szöveg feltételei szerint a rezsicsökkentés, az okostelefon vagy a táblagép volt. A további hét szóból még valamelyik kettőt ajánlotta László. Az ilyen szópárok száma:

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21.$$

Vagyis az összes esetek száma:  $3 \cdot 21 = 63$ .

Ebből csak egy a kedvező, így a valószínűség már meghatározható a kedvező esetek és az összes esetek számának hányadosaként.

A keresett valószínűség:  $\frac{1}{63}$ .

b) Az ajánlásban az ajánlott szavak sorrendje nem számít. A tíz szóból bármelyik három kiválasztása megfelelő lesz. Vagyis a megfelelő szóhármak száma:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

c) Számoljuk össze azokat az eseteket, amikor van szomszédos az ajánlott három szó között. A szavakat jelöljük röviden a 0, 1, 2, 3, ..., 9 számjegyekkel.

Lehet, hogy mindhárom egymás mellett van: 012, 123, ..., 789. Ez 8 eset.

Lehet, hogy pontosan kettő van egymás mellett. Ekkor könnyen megszámlálhatjuk, hogy hány különböző módon tudjuk hozzájuk választani a harmadikat. A két szomszédoshoz képest a harmadik lehet, hogy a listán kisebb, lehet, hogy nagyobb sorszámmal szerepelt.

A 01 esetén  $0 + 7$ ;  
 az 12 esetén  $0 + 6$ ;  
 a 23 esetén  $1 + 5$ ;  
 a 34 esetén  $2 + 4$ ;  
 a 45 esetén  $3 + 3$ ;  
 az 56 esetén  $4 + 2$ ;  
 a 67 esetén  $5 + 1$ ;  
 a 78 esetén  $6 + 0$ ;  
 a 89 esetén  $7 + 0$  lehetőség adódik.

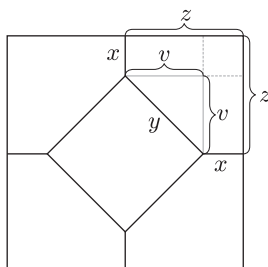
Így 56 esetet kaptunk.

Összesen  $8 + 56 = 64$  olyan szóhármak van, amelyek tartalmaznak szomszédos szavakat is. Mivel összesen 120-féleképpen lehet szóhármakat kiválasztani a 10 szóból, azért a feltételeknek  $120 - 64 = 56$  eset felel meg.

## II. rész

5. Egy 120 cm-szer 120 cm-es ablakba beilleszthető üvegtáblát az ábrán látható módon szeretnénk megosztani. (A négy ötszög egybevágó, az ötödik síkidom négyzet.)

- a) Milyen határok között mozog ennek az osztóvonalnak a hossza?
- b) Adjuk meg az osztóvonal hosszát centiméter pontossággal, ha az ablak belsejében kialakuló minta öt egyenlő területű részből áll. (16 pont)



**Megoldás.** Használjuk az *ábra* jelöléseit.

a) Mivel  $v = z - x = 60 - x$  (hiszen  $z$  az ablak szélességének a fele), azért  $y = \sqrt{2}(60 - x)$ . Felhasználtuk az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója és átfogója közötti kapcsolatot.

Az osztóvonal hossza  $4(x + y)$ , ezt most már kifejezhetjük csak  $x$  függvényeként:

$$f(x) = 4(x + \sqrt{2}(60 - x)) = 4(1 - \sqrt{2})x + 240\sqrt{2}.$$

$f(x)$  szigorúan monoton csökkenő elsőfokú függvény, ahol  $x \in ]0; 60[$ .

Mivel  $f(0) = 240\sqrt{2}$ , és  $f(60) = 240$ , azért az osztóvonal hossza 240 cm-nél nagyobb, és  $240\sqrt{2}$  cm-nél kisebb lehet.

b) A nagy négyzet területe:  $T = 4z^2$ . A belső kis négyzet területe a nagy négyzet ötödével egyenlő:  $t = y^2 = \frac{4z^2}{5}$ .  
Ebből kapjuk:  $y = \frac{2z}{\sqrt{5}}$ .

Mivel  $y$  az átfogója a  $v$  befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögnek, azért:

$$v = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{2z}{\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{2z}{\sqrt{10}} = \frac{z\sqrt{10}}{5}.$$

Ezeket felhasználva:

$$x = z - v = z - \frac{z\sqrt{10}}{5} = \frac{5 - \sqrt{10}}{5}z.$$

Vagyis az osztóvonal hossza:

$$4(x + y) = 4\left(\frac{5 - \sqrt{10}}{5}z + \frac{2}{\sqrt{5}}z\right) = \frac{4(5 - \sqrt{10} + 2\sqrt{5})}{5}z.$$

Tudjuk, hogy  $z = 60$  cm. Ezt behelyettesítve kapjuk a vonal hosszát, amit centiméterre kell kerekítenünk a feladat kérése szerint:

$$4(x + y) = \frac{4(5 - \sqrt{10} + 2\sqrt{5})}{5} \cdot 60 = 48(5 - \sqrt{10} + 2\sqrt{5}) \approx 303 \text{ (cm)}.$$

**6.** Egy mértani sorozat első és harmadik elemének összege 50, a második és negyedik elemének összege pedig 350. A sorozat minden eleme pozitív egész szám, továbbá az első  $n$  elem összege osztható 5-tel.

a) Adjuk meg a sorozat első négy elemét.

b) Határozzuk meg  $n$  értékét.

(16 pont)

**Megoldás.** a) A mértani sorozat tagjai:  $a, aq, aq^2, aq^3$ . A feladat szövege szerint:  $a + aq^2 = 50$  és  $aq + aq^3 = 350$ . Az egyenletek bal oldalán kiemeléssel szorzatokat alakítunk ki:

$$a(1 + q^2) = 50,$$

$$aq(1 + q^2) = 350.$$

Az első egyenlet bal oldalát  $q$ -val, a jobb oldalát 7-tel szorozva a második egyenletet kapjuk, ezért  $q = 7$ , és ehhez  $a = 1$  adódik. (Így valóban a sorozat minden tagja pozitív egész lesz.)

Vagyis a sorozat első négy tagja: 1, 7, 49, 343.

b) Folytassuk a sorozat tagjainak felírását: 1, 7, 49, 343, 2401, ... . A végződés periodikusan ismétlődnek négyesével: 1, 7, 9, 3, 1, ... .  $n$  tag esetén az összeg utolsó számjegyei a következők: 1, 8, 7, 0, 1, ... .

Mivel ezek is periodikusak, és minden negyedik végződés 0, (5-ös végződés nincs), azért minden negyedik sorszám megfelelő lesz.

Ez azt jelenti, hogy 4-gyel osztható  $n$  esetén lesz a kérdéses sorozat első  $n$  tagjának összege 5-tel osztható.

**7.** Adott az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög két szárának egyenlete:

$$a: 7x - 4y = -24, \quad b: x - 8y = 4,$$

továbbá a harmadik oldalára illeszkedő  $P(10; 4)$  pont.

a) Adjuk meg a szárak  $C$  metszéspontját.

b) Írjuk fel a  $C$  csúcsra illeszkedő belső szögfelező egyenletét.

c) Írjuk fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét.

(16 pont)

**Megoldás.** a) A  $C$  csúcs koordinátáit a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja:

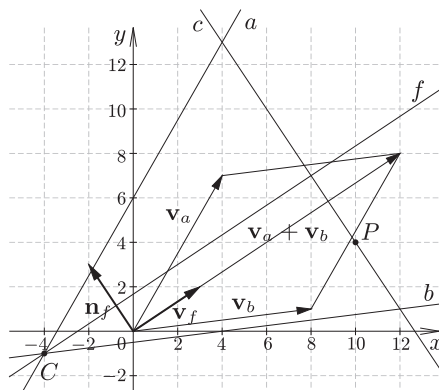
$$\begin{cases} 7x - 4y = -24, \\ x - 8y = 4. \end{cases}$$

A második egyenletből  $x = 8y + 4$ , ezt helyettesítsük be az első egyenletbe:

$$\begin{aligned} 7(8y + 4) - 4y &= -24, \\ y &= -1. \\ x &= 8(-1) + 4 = -4. \end{aligned}$$

Vagyis a szarak metszéspontja:  $C(-4; -1)$ .

b) Az  $a$  és  $b$  egyenesek a  $C$  pontban metszik egymást, a  $C$ -n át két szögfelező is húzható, de nekünk a feladat feltételei szerint csak annak a tartománynak a szögfelezője kell, amelyikben benne van a  $P(10; 4)$  pont.



Határozzuk meg ennek az  $f$  szögfelezőnek az irányvektorát. Az egyenes irányvektoros egyenletének ismeretében az  $a$  egyenes irányvektora:  $\mathbf{v}_a(4; 7)$ , a  $b$  egyenes irányvektora:  $\mathbf{v}_b(8; 1)$ .

$\mathbf{v}_a$  és  $\mathbf{v}_b$  egyenlő hosszúságúak:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_a| &= \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}, \\ |\mathbf{v}_b| &= \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}. \end{aligned}$$

Ha két egyenlő hosszú vektort összeadunk, akkor a paralelogramma szabályra gondolva a paralelogramma rombusz lesz. A rombusz átlója pedig szögfelező. Így most az  $f$  belső szögfelező egyik irányvektora:  $\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b$ .

A koordinátákkal elvégezve a megfelelő műveleteket:

$$\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b = (4 + 8)\mathbf{i} + (7 + 1)\mathbf{j} = 12\mathbf{i} + 8\mathbf{j},$$

ahol  $\mathbf{i}$  és  $\mathbf{j}$  a szokásos egységvektorokat jelenti:  $\mathbf{i}(1; 0)$ ,  $\mathbf{j}(0; 1)$ .

A  $\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b$  vektornak a negyedével fogunk tovább számolni. Ez a vektor az  $f$  egyik irányvektora:  $\mathbf{v}_f(3; 2)$ . A megfelelő forgatással megkapjuk az  $\mathbf{n}_f(2; -3)$  normálvektort is. Az  $\mathbf{n}_f(2; -3)$  normálvektorral felírható a  $C(-4; -1)$  csúcsra illeszkedő  $f$  szögfelező egyenlete:

$$f: 2x - 3y = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-1) = -5.$$

c) Mivel a háromszög egyenlő szárú, azért az  $a$  és  $b$  egyenesek szögfelezője merőleges lesz a harmadik oldalegyenesre, vagyis a szögfelező irányvektora a keresett  $c$  oldalegyenes normálvektora lesz:  $\mathbf{v}_f = \mathbf{n}_c(3; 2)$ . Az  $\mathbf{n}_c(3; 2)$  normálvektorral felírható a  $P(10; 4)$  pontra illeszkedő  $c$  egyenes egyenlete:

$$c: 3x + 2y = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 38.$$

8. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$(2 - 4\sqrt{3}) \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + (2 - 2\sqrt{3}) \sin^2 x = 2 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

(16 pont)

**Megoldás.** Használjuk a függvénytáblázat trigonometriai azonosságait. Tudjuk, hogy  $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ ,  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  és  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ . A két utóbbi különbségeként és összegeként a következő azonosságokat kapjuk:

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad \text{illetve} \quad 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x.$$

Ezek felhasználásával az egyenletet így írhatjuk:

$$\begin{aligned} (1 - 2\sqrt{3})(1 + \cos 2x) + \sin 2x + (1 - \sqrt{3})(1 - \cos 2x) &= 2 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}, \\ 1 - 2\sqrt{3} + \cos 2x - 2\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 1 - \sqrt{3} - \cos 2x + \sqrt{3} \cos 2x &= 2 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}, \\ \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Osztunk 2-vel, hogy alkalmazható legyen a függvénytáblázat

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

azonossága:

$$\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ekkor az  $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$  helyére rendre a  $\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{4}$  értékeket írjuk, így az  $\alpha = 2x$ , a  $\beta = \frac{\pi}{3}$  lesz:

$$\begin{aligned} \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} &= \sin \frac{\pi}{4}, \\ \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) &= \sin \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{I. } \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{4} = 2k_1\pi, \text{ ahol } k_1 \in \mathbb{Z}: \quad x_1 = -\frac{\pi}{24} + k_1\pi.$$

$$\text{II. } \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k_2\pi, \text{ ahol } k_2 \in \mathbb{Z}: \quad x_2 = \frac{5\pi}{24} + k_2\pi.$$

**9.** Ha a  $[-3; 3]$  intervallumon értelmezett  $f(x) = 2|x+1| + 2|x-1|$  és  $g(x) = x^2$  hozzárendelésű függvények görbáját az  $y$  tengely körül megforgatjuk, akkor két pohár belső felületét kapjuk. A koordinátarendszer egysége pontosan 1 cm. Adjuk meg a két pohár térfogatának különbségét.

A számolás során – ha szükséges – felhasználhatjuk, hogy az  $[a; b]$ -n értelmezett  $f(x)$  függvény grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

(16 pont)

**Megoldás.** Ábrázoljuk az első poharat meghatározó  $f(x) = 2|x+1| + 2|x-1|$  hozzárendelésű függvényt a  $[-3; 3]$  intervallumon.

Ha  $x \in [-3; -1]$ , akkor  $f(x) = -2x - 2 - 2x + 2 = -4x$ .

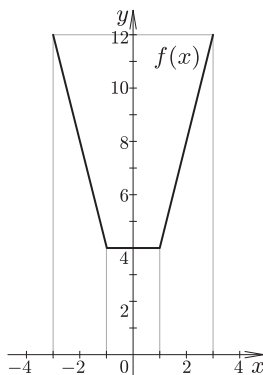
Ha  $x \in [-1; 1]$ , akkor  $f(x) = 2x + 2 - 2x + 2 = 4$ .

Ha  $x \in [1; 3]$ , akkor  $f(x) = 2x + 2 + 2x - 2 = 4x$ .

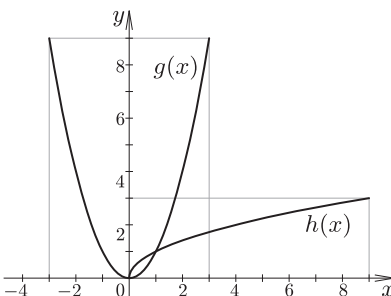
Ezek alapján az 1. ábra mutatja az  $f(x)$  grafikonját.

A grafikon  $y$  tengely körüli megforgatásával csonkakúpot kapunk. Alapköreinek sugara:  $r = 1$ ,  $R = 3$ , magassága:  $m = 8$ . Használjuk a csonkakúp térfogatképletét:

$$V_1 = \frac{\pi}{3} m (R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi}{3} \cdot 8 \cdot (9 + 3 + 1) = \frac{104\pi}{3} \approx 108,9 \text{ (cm}^3\text{)}.$$



1. ábra



## 2. ábra

A másik pohár (2. ábra) is forgástest alakú. Ha az  $x$  tengely körül megforgatjuk a  $[0; 9]$  intervallumon a  $h(x) = \sqrt{x}$  függvény görbét, akkor is ezt a testet kapjuk.

Használhatjuk a feladat szövegében megadott térfogatkiszámítási módot. Ennek a testnek a térfogata:

$$V_2 = \pi \int_0^9 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^9 x dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^9 = \frac{81\pi}{2} \approx 127,2 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vagyis a második pohár térfogata  $18,3 \text{ cm}^3$ -rel nagyobb, mint az elsőé.