

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Péternek volt 84 000 Ft-ja, amit édesapja $p\%$ -kal megnövelt. Ezt követően Péter a pénzének $(p - 5)\%$ -ért könyveket vásárolt. Ekkor annyi pénze maradt, mint amennyi eredetileg volt. Mennyibe kerültek a könyvek? (11 pont)

2. Milyen háromszög oldalaira teljesül az $a^4 + 2b^2c^2 = b^4 + c^4$ összefüggés? (12 pont)

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\begin{cases} \frac{14}{x+3y-5} - \frac{15}{x+y+2} = 4, \\ \frac{7}{x+3y} + \frac{9}{x+y} = 4. \end{cases} \quad (14 \text{ pont})$$

4. Egy kiadó honlapján az olvasók szavazhattak arra, hogy szerintük mi volt 2013 legjellemzőbb szava. A játékosoknak három szót kellett ajánlani. László nagyon korán bekapcsolódott a játékba, és ekkor mindhárom szava felkerült a tízes listára. Az ekkori állást a következő táblázat mutatja:

A szó	szavazatok száma
Rezsicsökkentés	36
Okostelefon	25
Táblagép	24
Életpályamodell	21
Kedvesem	16
Nemzeti dohánybolt	15
Jobban teljesít	14
Devizahitel	11
Összefogás	10
Remény	8

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy kitaláljuk az általa ajánlott három szót, ha tudjuk, hogy ekkor pontosan egy szava szerepelt a legjobb három között?

b) Hányféle olyan ajánlás képzelhető el, amelynek mindhárom szava szerepel a listán?

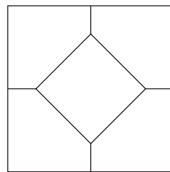
c) Hányféle olyan ajánlás képzelhető el, amelynek mindhárom szava szerepel a listán, de nincsenek szomszédosak közöttük? (14 pont)

II. rész

5. Egy 120 cm-szer 120 cm-es ablakba beilleszthető üvegtáblát az ábrán látható módon szeretnénk megosztani. (A négy ötszög egybevágó, az ötödik síkidom négyzet.)

a) Milyen határok között mozog ennek az osztóvonalnak a hossza?

b) Adjuk meg az osztóvonal hosszát centiméter pontossággal, ha az ablak belsejében kialakuló minta öt egyenlő területű



részből áll. (16 pont)

6. Egy mértani sorozat első és harmadik elemének összege 50, a második és negyedik elemének összege pedig 350. A sorozat minden eleme pozitív egész szám, továbbá az első n elem összege osztható 5-tel.

a) Adjuk meg a sorozat első négy elemét.

b) Határozzuk meg n értékét. (16 pont)

7. Adott az ABC egyenlő szárú háromszög két szárának egyenlete:

$$a: 7x - 4y = -24, \quad b: x - 8y = 4,$$

továbbá a harmadik oldalára illeszkedő $P(10; 4)$ pont.

a) Adjuk meg a szárak C metszéspontját.

b) Írjuk fel a C csúcsra illeszkedő belső szögfelező egyenletét.

c) Írjuk fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét.

(16 pont)

8. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$(2 - 4\sqrt{3}) \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + (2 - 2\sqrt{3}) \sin^2 x = 2 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}. \quad (16 \text{ pont})$$

9. Ha a $[-3; 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = 2|x+1| + 2|x-1|$ és $g(x) = x^2$ hozzárendelésű függvények görbéjét az y tengely körül megforgatjuk, akkor két pohár belső felületét kapjuk. A koordinátarendszer egysége pontosan 1 cm. Adjuk meg a két pohár térfogatának különbségét.

A számolás során – ha szükséges – felhasználhatjuk, hogy az $[a; b]$ -n értelmezett $f(x)$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (16 \text{ pont})$$