Megoldásvázlatok a 2013/9. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Egy televíziós tehetségkutató műsorban négy mentor énekesei versenyeznek. A nézők telefonos szavazatai alapján alakul ki a sorrend. A műsorvezető az izgalom fokozása miatt minden mentornak ad egy kis információt a szavazás állásáról. Sorban ezek az állítások hangzottak el:*

A három versenyződ közül pontosan kettő nincs az utolsó három hely egyikén.

A két versenyződ közül pontosan egy áll az utolsó három hely egyikén.

A két versenyződ közül legalább egy az utolsó három hely egyikén áll.

A két versenyződ közül legalább egy biztosan nincs az utolsó három hely egyikén.

a) A négy mentor közül gondolhatja-e ekkor valamelyik azt, hogy a versenyzői közül semelyik sincs az utolsó három hely egyikén?

b) Hányféle sorrend képzelhető el az elhangzott mondatok alapján? (*11 pont*)

Megoldás. *a*) Az elhangzottak alapján az első mentornak pontosan egy versenyzője az utolsó három hely valamelyikén áll. Hasonlóan a második mentornak is pontosan egy versenyzője áll az utolsó három hely valamelyikén. A harmadik mentor egy vagy kettő versenyzője lehet ezeken a helyeken, de az eddigiek alapján tudható, hogy már csak egy ilyen versenyző lehet. Mindezeket figyelembe véve a negyedik mentor két versenyzője közül „a legalább egy biztosan nincs az utolsó három hely egyikén” úgy valósulhat meg, hogy egyik sincs az utolsó három hely egyikén.

Vagyis a negyedik mentor nyugodt lehet, mert az utolsó három hely egyikén sincs versenyzője.

b) Legyen az első mentor három versenyzője: A_1, A_2, A_3, a második mentoré: B_1, B_2, a harmadik mentoré: C_1, C_2, a negyedik mentoré pedig: D_1, D_2. Ezt a kilenc versenyzőt kell a megfelelő információk alapján az összes lehetséges módon sorba rendezve elképzelnünk.

Tudjuk, hogy az első, második és harmadik mentor egy-egy versenyzője az utolsó három hely valamelyikén áll (például az A_1, B_1, C_1 versenyzők). A további hat versenyző ezeket 6!-féle sorrendben előzheti meg. A három versenyző pedig 3!-féle sorrendben állhat az utolsó három helyen. Ez $6! \cdot 3! = 4320$ eset. A három gyengén szereplő kiválasztására is több lehetőségünk van. Összesen $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$-féleképpen képzelhető az utolsó három helyen végzettek kiválasztása. Vagyis az összes elképzelhető sorrendek száma: $12 \cdot 4320 = 51\,840$.

2. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\lg(2-x) \cdot \sqrt{6-x-x^2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

(*12 pont*)

Megoldás. A logaritmus miatt: $2 - x > 0$. Ezek szerint: $x \in]-\infty; 2[$. A négyzetgyök miatt: $6 - x - x^2 \geq 0$, azaz $(2-x)(x+3) \geq 0$. Ezek szerint: $x \in [-3; 2]$. Vagyis a feladat értelmezési tartománya: $x \in [-3; 2[$.

A három tényező zérushelyeit külön-külön megvizsgáljuk.

Az első tényező zérushelye az 1, és ez benne van a feladat értelmezési tartományában.

A második tényező zérushelyei a -3 és a 2. Ebből csak a -3 van benne a feladat értelmezési tartományában.

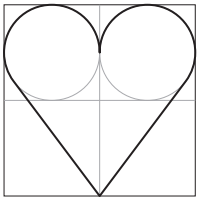
A harmadik tényező zérushelyei a $\frac{\pi}{6} + k\pi$, ahol k egész szám. A feladat értelmezési tartománya miatt csak a $k = -1$ és a $k = 0$ ad megfelelő értéket.

Ezek alapján a feladat megoldásai:

$$-3, \quad -\frac{5\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6}, \quad 1.$$

3. *Enikő pólóján egy olyan szív alakú forma látható, amelyet egy* 24 cm *oldalú négyzetbe lehet rajzolni az* ábrán *látható módon.*

Mekkora az így kapott szív kerülete, területe? (*14 pont*)

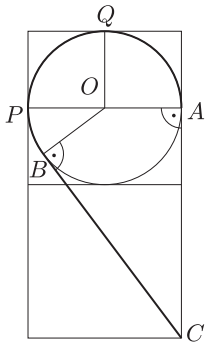


Megoldás. Az ábra függőlegesen szimmetrikus, ezért elég a felével foglalkoznunk.

A körök sugara a nagy négyzet oldalának negyedével egyenlő hosszú, azaz 6 cm. Adott körhöz külső pontból két azonos hosszúságú érintőszakasz húzható, ezért $CA = CB$. A CA pedig a nagy négyzet oldalának háromnegyedével egyenlő. Vagyis $CA = CB = 18$ cm. Ezek alapján a $CAOB$ derékszögű deltoid területe:

$$T_1 = 6 \cdot 18 = 108 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Az OBC derékszögű háromszögben az O-nál lévő α hegyesszögre: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{18}{6} = 3$, vagyis $2\alpha \approx 143{,}13°$.



A $360° - 143{,}13° = 216{,}87°$-os AB körívhez tartozó körcikk területe:

$$T_2 = 6^2 \cdot \pi \cdot \frac{216{,}87°}{360°} \approx 68{,}13 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A szív alakú forma területe:

$$2(T_1 + T_2) = 2(108 + 68{,}13) = 352{,}26 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A $360° - 143{,}13° = 216{,}87°$-os AB körív hossza:

$$I = 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot \frac{216{,}87°}{360°} \approx 22{,}71 \text{ (cm)}.$$

A szív alakú forma kerülete:

$$K = 2(I + BC) = 2(22{,}71 + 18) = 81{,}42 \text{ (cm)}.$$

4. *Kiválasztottunk nyolc olyan várost, amelyek közül bármelyik kettő között közvetlen repülőgép összeköttetés van. Egy téli napon a rendkívüli időjárási viszonyok miatt az összes ilyen útvonalból kilencen szüneteltetik a közlekedést. Mennyi annak a valószínűsége, hogy négy véletlenszerűen választott útvonalból pontosan kettőn van közlekedés?* (*14 pont*)

Megoldás. Mivel bármelyik kettő között közvetlen repülőgép összeköttetés van, ezért a nyolc város között összesen $\binom{8}{2}$, azaz 28 útvonal van. Összeszámoljuk az összes lehetőségek számát. A 28 útvonal közül négyet választunk véletlenszerűen. Ezt $\binom{28}{4}$-féleképpen tehetjük meg. Most a vizsgált esemény szempontjából a kedvező eseteket számoljuk össze. A két útvonalat, amelyen nincs közlekedés kilencből választhatjuk, a két útvonalat, amelyen pedig van közlekedés, 19-ből választhatjuk. Vagyis ezek száma összesen: $\binom{9}{2}\binom{19}{2}$.

A keresett valószínűséget a kedvező esetek számának és az összes esetek számának hányadosa adja:

$$p = \frac{\binom{9}{2}\binom{19}{2}}{\binom{28}{4}} \approx 0{,}3.$$

II. rész

5. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{\frac{12-2\lg x}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x}} = 10{,}24. \qquad (\textit{16 pont})$$

Megoldás. Csak pozitív számnak van logaritmusa, ezért $x > 0$, továbbá a nevezők nem lehetnek 0-val egyenlők, ezért $x \neq 10^5$, valamint $x \neq 10^{-1}$. Vagyis a feladat értelmezési tartománya: $\mathbb{R}^+ \setminus \{10^{-1}; 10^5\}$.

Mivel

$$10{,}24 = \frac{1024}{100} = \frac{256}{25} = \frac{4^4}{\sqrt{5}^4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{-4},$$

azért az eredeti egyenletünk így írható:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{\frac{12-2\lg x}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{-4}.$$

Az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége alapján kapjuk, hogy:

$$\frac{12-2\lg x}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x} = -4,$$
$$(12-2\lg x)(1+\lg x) - 4(-5+\lg x) = -4(-5+\lg x)(1+\lg x),$$
$$\lg^2 x - 5\lg x + 6 = 0.$$

Ez $\lg x$-re másodfokú, az egyenlet két megoldása: $\lg x_1 = 2$, $\lg x_2 = 3$. Vagyis: $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$.

Ezek benne vannak az értelmezési tartományban, valóban megoldásai az egyenletnek.

6. *Az $ABCDEFGH$ kockát kettévágtuk az A csúcsra, a BF él P felezőpontjára és az $ADHE$ oldallap Q középpontjára illeszkedő síkkal.*

a) Mekkora a vágásfelület területe a kocka élével kifejezve?

b) Hogyan aránylik egymáshoz a kocka két részének térfogata? (*16 pont*)

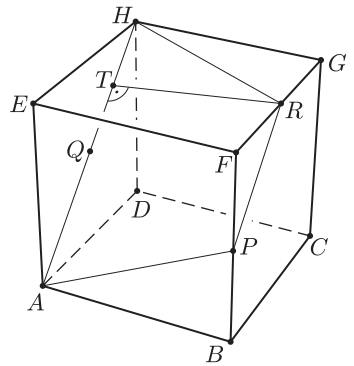
Megoldás. *a)* A vágás síkjában lévő AQ egyenesre illeszkedik a H pont, ezért H is rajta van a vágásfelületen. Az $ADHE$ és $BCGF$ párhuzamos lapjai a kockának, ezért a vágási síkkal alkotott metszésvonaluk párhuzamos egymással. Az egyik metszésvonal az AH egyenes, a vele párhuzamos P ponton áthaladó metszésvonal az FG élt az R felezőpontban metszi. Vagyis az $APRH$ síkidom (ami egy húrtrapéz) a vágásfelület, ennek a területét kell meghatároznunk.

Az $AH = a\sqrt{2}$, mert az a oldalú négyzet átlójáról van szó. A $PR = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, mert ez a szakasz az a oldalú négyzet átlójának felével egyenlő hosszúságú. A $HR = AP$ szárak hosszát meghatározhatjuk a HGR derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel segítségével:

$$HR = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

A vágás síkjában lévő RTH derékszögű háromszögben

$$TH = \frac{AH - PR}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Pitagorasz-tétel alkalmazásával megkapjuk az $APRH$ trapéz TR magasságát:

$$TR = \sqrt{HR^2 - TH^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{8}a^2} = a\frac{3}{2\sqrt{2}} = a\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

A vágásfelület területe:

$$T = \frac{\left(a\sqrt{2} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot a\frac{3\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{9}{8}a^2.$$

b) Az egyik rész egy AEH (egyenlő szárú, derékszögű háromszög) alaplapú és PFR fedőlapú csonkagúla. Alaplapjának területe: $T = \dfrac{a \cdot a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$, fedőlapjának területe:

$$t = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8}.$$

A két sík távolsága a, ez adja a csonkagúla m magasságát.

Most már alkalmazhatjuk a csonkagúla térfogatképletét:

$$V_1 = \frac{m}{3}\left(T + \sqrt{Tt} + t\right) = \frac{a}{3}\left(\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{8}} + \frac{a^2}{8}\right) = \frac{a}{3} \cdot \frac{7a^2}{8} = \frac{7}{24}a^3.$$

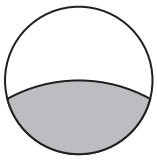
A másik rész térfogata:

$$V_2 = a^3 - \frac{7}{24}a^3 = \frac{17}{24}a^3.$$

Tehát a két rész aránya:

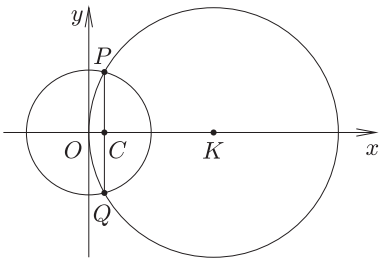
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{7}{24}a^3}{\frac{17}{24}a^3} = \frac{7}{17}.$$

7. *Az* ábrán *Ibolya egyik fülbevalójának vázlatrajza látható. A körlemez középpontján áthaladó körív sugara kétszerese az eredeti körlemez sugarának. A fülbevaló hány százaléka sötétebb árnyalatú?* (*16 pont*)



Megoldás. Nem megy az általánosság rovására, ha a fülbevaló sugarát 1-nek, a benne lévő körív sugarát pedig 2-nek vesszük. Helyezzük az ábrát koordinátarendszerbe olyan módon, hogy a kör O középpontja az origó, a körív középpontja a $K(2;0)$ koordinátájú pont legyen. Ekkor a két kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (x-2)^2 + y^2 = 4.$$



Meg szeretnénk határozni a két kör metszéspontjainak koordinátáit, ezért megoldjuk az egyenletrendszert. A második egyenletben a négyzetre emelés elvégzése után az $x^2 + y^2$ helyére 1-et írhatunk:

$$-4x + 4 + 1 = 4, \quad x = \frac{1}{4}.$$

Ezt visszahelyettesítve például az első egyenletbe, kapjuk a két metszéspont koordinátáit:

$$P\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right), \quad Q\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{15}}{4}\right).$$

A fülbevaló sötétebb részét a PQ szakasz két körszeletre vágja. Ezeknek megadjuk külön-külön a területét. Alkalmazzuk a körszelet területképletét: $T = \dfrac{1}{2}\big[ri - h(r-m)\big]$, ahol r a körív sugara, i a körív hossza, h a határoló húr hossza, m pedig a körszelet magassága.

Az 1 sugarú körszelet területéhez már a következő adatok a rendelkezésünkre állnak:

$$r_1 = 1, \quad h_1 = PQ = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad m_1 = \frac{3}{4}.$$

Meg kell még adnunk a megfelelő PQ körív hosszát. Ehhez a POQ nagyságát kell ismernünk. A POC derékszögű háromszögben (ahol a PQ és a vízszintes tengely metszéspontja a C pont) az O-nál lévő β szögre:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15},$$

ahonnan $POQ = 2\beta \approx 151{,}04°$. Vagyis

$$\frac{i_1}{2\pi} = \frac{151{,}04°}{360°}, \quad \text{azaz} \quad i_1 \approx 2{,}636.$$

Behelyettesítünk a területképletbe:

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[1 \cdot 2{,}636 - \frac{\sqrt{15}}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\right)\right] \approx 1{,}076.$$

A 2 sugarú körszelet területéhez pedig a következő adatok állnak a rendelkezésünkre:

$$r_2 = 2, \quad h_2 = h_1 = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{4}.$$

Most is meg kell adnunk a megfelelő PQ körív hosszát. Ehhez a PKQ nagyságát kell ismernünk. A PKC derékszögű háromszögben a K-nál lévő α szögre:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{7},$$

ahonnan $PKQ = 2\alpha \approx 57{,}91°$. Vagyis

$$\frac{i_2}{4\pi} = \frac{57{,}91°}{360°}, \quad \text{azaz} \quad i_2 \approx 2{,}021.$$

Megint behelyettesítünk a területképletbe:

$$T_2 = \frac{1}{2}\left[2 \cdot 2{,}021 - \frac{\sqrt{15}}{2}\left(2 - \frac{1}{4}\right)\right] \approx 0{,}327.$$

A sötétebb színnel színezett rész területe $T_1 + T_2 = 1{,}076 + 0{,}327 = 1{,}403$, a fülbevaló területe pedig π.

Vagyis a fülbevaló kb. 44,7%-a sötétebb árnyalatú.

8. *Egy harmadfokú függvényről tudjuk, hogy $f(2) = f(4) = 4$, a harmadfokú tag együtthatója 1, továbbá*

$$\int_2^6 f(x)\,dx = 16.$$

Írjuk fel a függvénygörbe érintőjének egyenletét a görbe 5 abszcisszájú pontjában. (*16 pont*)

Megoldás. A harmadfokú függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Tudjuk, hogy:

$$f(2) = 8 + 4b + 2c + d = 4, \quad f(4) = 64 + 16b + 4c + d = 4.$$

Továbbá:

$$\begin{aligned}\int_2^6 f(x)\,dx &= \int_2^6 \left(x^3 + bx^2 + cx + d\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^3}{3} + c \cdot \frac{x^2}{2} + d \cdot x\right]_2^6 = \\ &= \left(\frac{6^4}{4} + b \cdot \frac{6^3}{3} + c \cdot \frac{6^2}{2} + d \cdot 6\right) - \left(\frac{2^4}{4} + b \cdot \frac{2^3}{3} + c \cdot \frac{2^2}{2} + d \cdot 2\right) = \\ &= (324 + 72b + 18c + 6d) - \left(4 + \frac{8}{3}b + 2c + 2d\right) = \\ &= \frac{208}{3}b + 16c + 4d + 320 = 16.\end{aligned}$$

A kapott három egyenlet rendezése után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}4b + 2c + d &= -4, \\ 16b + 4c + d &= -60, \\ 208b + 48c + 12d &= -912.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $b = -12$, $c = 44$, $d = -44$, azaz a harmadfokú függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 44$.

Meghatározzuk a keresett érintő meredekségét. Mivel $f'(x) = 3x^2 - 24x + 44$, így $f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 24 \cdot 5 + 44 = -1$. Az érintő meredeksége: $m = -1$.

Mivel $f(5) = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 44 \cdot 5 - 44 = 1$, ezért az érintési pont koordinátái: $E(5; 1)$.

Az $E(5; 1)$ pontra illeszkedő, $m = -1$ meredekségű érintő egyenlete: $x + y = 6$.

9. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\left(x^2 - 2013^2\right)^2 - 1 = 8052\,x. \qquad (\textit{16 pont})$$

Megoldás. Végezzük el a négyzetre emelést és adjunk mindkét oldalhoz 1-et:

$$x^4 - 2 \cdot 2013^2 \cdot x^2 + 2013^4 = 8052x + 1.$$

Adjunk mindkét oldalhoz $4 \cdot 2013^2 \cdot x^2$-et, ekkor a bal oldalon továbbra is teljes négyzet lesz, és a jobb oldalon is kialakul egy teljes négyzet:

$$\left(x^2 + 2013^2\right)^2 = 4 \cdot 2013^2 \cdot x^2 + 8052x + 1,$$
$$\left(x^2 + 2013^2\right)^2 = (2 \cdot 2013x + 1)^2.$$

Rendezzük nullára az egyenletet, és bontsuk szorzattá az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosság segítségével:

$$\left(x^2 + 2013^2\right)^2 - (2 \cdot 2013x + 1)^2 = 0,$$
$$\left(x^2 + 2013^2 - 2 \cdot 2013x - 1\right)\left(x^2 + 2013^2 + 2 \cdot 2013x + 1\right) = 0.$$

Mindkét tényezőt tovább alakíthatjuk:

$$\left[(x - 2013)^2 - 1\right] \cdot \left[(x + 2013)^2 + 1\right] = 0.$$

Az első tényezőt tovább bonthatjuk szorzattá:

$$(x - 2013 - 1) \cdot (x - 2013 + 1) \cdot \left[(x + 2013)^2 + 1\right] = 0,$$
$$(x - 2014) \cdot (x - 2012) \cdot \left[(x + 2013)^2 + 1\right] = 0.$$

A harmadik tényező minden x esetén pozitív. Az első két tényezőből kapunk megoldást: $x_1 = 2014$, $x_2 = 2012$. Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért ezek az eredeti egyenletnek is a megoldásai.