

Megoldásvázlatok a 2011/4. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

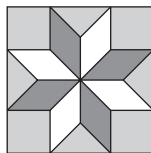
$$\frac{2x^2 - 1961x + 4000}{x^2 - 2011x + 2010} - \frac{x^2 + 51x - 20}{(x - 2010)(x - 1)} = 0. \quad (11 \text{ pont})$$

Megoldás. A két nevező egyenlő. A feladat értelmezési tartománya: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2010\}$. A számlálók különbségének nullát kell adnia:

$$(2x^2 - 1961x + 4000) - (x^2 + 51x - 20) = 0.$$

A következő másodfokú egyenletet kapjuk: $x^2 - 2012x + 4020 = 0$. A gyökök: $x_1 = 2$, $x_2 = 2010$. A feladat megoldása az $x_1 = 2$, mert csak ez van benne az értelmezési tartományban.

2. Nagymama konyháját az ábrán látható négyzet alakú járólapokkal burkolták. A lap belsejében a mintát alkotó szakaszok mindegyike 5,8 cm hosszú. A nyolc egybevágó rombuszból négy fehér, négy piros, a lap többi része szürke.



a) Adjuk meg egy járólap méretét milliméterre kerekítve. b) A járólap területének hány százaléka piros, és hány százaléka szürke? c) Egy járólapot a középpontján át, két fehér rombusz átlója mentén kettévágunk. Milyen hosszú a vágás?

(13 pont)

A négyzet alakú járólap oldala: $a = 2x + x\sqrt{2} = x(2 + \sqrt{2})$, ahol $x = 5,8$ cm. Vagyis milliméterre kerekítve: $a \approx 19,8$ cm.

b) A járólap területe: $T = 5,8^2 \cdot (2 + \sqrt{2})^2 \approx 392,14$ (cm²). A szürke rész hat darab 5,8 cm oldalhosszúságú négyzet területével egyenlő:

$$t_{\text{szürke}} = 6 \cdot 5,8^2 = 201,84 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A maradék fele piros:

$$t_{\text{piros}} = \frac{392,14 - 201,84}{2} = 95,15 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Százalékokat kell meghatároznunk:

$$\frac{201,84 \cdot 100}{392,14} \approx 51,47, \quad \text{illetve} \quad \frac{95,15 \cdot 100}{392,14} \approx 24,26.$$

Vagyis a szürke rész kb. 51,47%, a piros rész pedig kb. 24,26%.

c) Az ABC derékszögű háromszög AB átmérőjének hosszát kell meghatároznunk. Tudjuk, hogy $BC = 5,8 \cdot \sqrt{2}$, $AC = 5,8 \cdot (2 + \sqrt{2})$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$AB = \sqrt{(5,8 \cdot \sqrt{2})^2 + 5,8^2 \cdot (2 + \sqrt{2})^2} \approx 21,4.$$

Vagyis a vágás hossza kb. 21,4 cm.

3. Határozzuk meg azt a pozitív egész x értéket, amelyre a következő összeg egészekre kerekítve 2540 lesz.

$$\log_x \left(5 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right) + \log_x \left(5^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + \log_x \left(5^3 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \right) + \dots + \log_x \left(5^{99} \cdot \sqrt{\frac{99}{100}} \right). \quad (13 \text{ pont})$$

Megoldás. Használjuk a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosságot:

$$\log_x 5 + \log_x \sqrt{\frac{1}{2}} + \log_x 5^2 + \log_x \sqrt{\frac{2}{3}} + \log_x 5^3 + \log_x \sqrt{\frac{3}{4}} + \dots + \log_x 5^{99} + \log_x \sqrt{\frac{99}{100}}.$$

Csoportosítsuk a tagokat:

$$(\log_x 5 + \log_x 5^2 + \dots + \log_x 5^{99}) + \left(\log_x \sqrt{\frac{1}{2}} + \log_x \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \log_x \sqrt{\frac{99}{100}} \right).$$

Az első zárójeles kifejezést tovább alakítjuk a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\begin{aligned} \log_x 5 + \log_x 5^2 + \dots + \log_x 5^{99} &= 1 \cdot \log_x 5 + 2 \cdot \log_x 5 + \dots + 99 \cdot \log_x 5 = \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 99) \cdot \log_x 5 = \frac{99 \cdot (99 + 1)}{2} \cdot \log_x 5 = 4950 \cdot \log_x 5. \end{aligned}$$

Most a második zárójelben lévő összeget hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\begin{aligned} \log_x \sqrt{\frac{1}{2}} + \log_x \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \log_x \sqrt{\frac{99}{100}} &= \log_x \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \dots \sqrt{\frac{99}{100}} \right) = \\ &= \log_x \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}} = \log_x \sqrt{\frac{1}{100}} = \log_x \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Vagyis:

$$4950 \cdot \log_x 5 + \log_x 0,1 = 4950 \cdot \frac{\lg 5}{\lg x} - \frac{1}{\lg x} = \frac{4950 \cdot \lg 5 - 1}{\lg x}.$$

Mivel $\frac{4950 \cdot \lg 5 - 1}{\lg x}$ egészekre kerekített értéke 2540, azért $2539,5 < \frac{4950 \cdot \lg 5 - 1}{\lg x} < 2541,5$, amiből következik az is, hogy $\lg x$ pozitív. Átrendezés után:

$$1,360 < \frac{4950 \cdot \lg 5 - 1}{2541,5} < \lg x \leq \frac{4950 \cdot \lg 5 - 1}{2539,5} < 1,363.$$

Mivel a 10-es alapú exponenciális függvény növekedő függvény, azért az egyenlőtlenségek iránya nem változik: $22,9 < x < 23,07$.

Egyetlen egész tesz eleget a feladat követelményeinek, mégpedig a 23.

4. Adjuk meg a következő hozzárendeléssel adott függvények legbővebb értelmezési tartományát és a hozzátartozó értékkészletet, ha mindkét halmaz csak egész számokból áll:

$$a) \quad f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+7}}; \quad b) \quad g(x) = \left| \frac{5-x}{x+7} \right|. \quad (14 \text{ pont})$$

Megoldás. a) A négyzetgyök miatt $\frac{5-x}{x+7} \geq 0$, vagyis $x \in]-7; 5]$. Mivel x egész szám, ezért az intervallumot tovább kell szűkítenünk: $x \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Ezek közül csak azok a számok maradhatnak, amelyekre $f(x)$ is egész. A tizenkét számot könnyen ellenőrizhetjük és két lehetőséget kapunk: $f(-1) = 1$, $f(5) = 0$.

Vagyis az $f(x)$ értelmezési tartománya: $x \in \{-1; 5\}$, az értékkészlete: $f(x) \in \{0; 1\}$.

b) A nevező miatt: $x \neq -7$. Ezen túl csak azok az egész számok maradhatnak, amelyekre $g(x)$ is egész. Végezzük el a következő átalakítást:

$$g(x) = \left| \frac{5-x}{x+7} \right| = \left| \frac{-(x+7)+12}{x+7} \right| = \left| -1 + \frac{12}{x+7} \right|.$$

Ez csak akkor lehet egész szám, ha $-1 + \frac{12}{x+7}$ egész, azaz $x+7$ osztója a 12-nek. Ezek alapján a megfelelő értékeket táblázatban rögzítettük.

$x+7$	-12	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	12
x	-19	-13	-11	-10	-9	-8	-6	-5	-4	-3	-1	5
$g(x)$	2	3	4	5	7	13	11	5	3	2	1	0

Vagyis a $g(x)$ értelmezési tartománya: $x \in \{-19; -13; -11; -10; -9; -8; -6; -5; -4; -3; -1; 5\}$, az értékkészlete: $g(x) \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 11; 13\}$.

II. rész

5. Az $f(x)$ egy másodfokú függvény, a $g(x)$ pedig egy lineáris törtfüggvény. Tudjuk, hogy $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = -1$, $f(3) = 3$, a $g(3)$ pedig nem értelmezhető.

a) Határozzuk meg az $f(44)$ értékét.

b) Határozzuk meg a $g(9)$ értékét.

c) Hány megoldása lehet az $f(x) = g(x)$ egyenletnek? Adjuk meg a gyököket.

(16 pont)

Megoldás. a) Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ hozzárendelésű másodfokú függvény. Tudjuk, hogy $f(0) = c = 0$, $f(1) = a + b = -1$, $f(3) = 9a + 3b = 3$. Az így kapott egyenletrendszer megoldása: $a = 1$, $b = -2$, azaz $f(x) = x^2 - 2x$. Vagyis $f(44) = 44^2 - 2 \cdot 44 = 1848$.

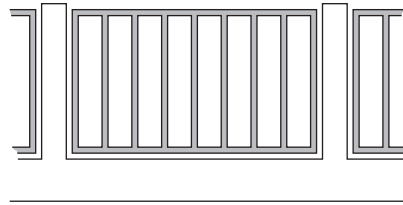
b) Legyen $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ hozzárendelésű lineáris törtfüggvény ($c \neq 0$). Tudjuk, hogy $g(0) = \frac{b}{d} = 0$, ezért $b = 0$. Tudjuk, hogy $g(3)$ nincs értelmezve, vagyis $g(x) = \frac{ax}{cx-3c}$. Tudjuk továbbá, hogy $g(1) = \frac{a}{c-3c} = \frac{a}{-2c} = -1$, azaz $a = 2c$. Mindent összevetve:

$$g(x) = \frac{2cx}{cx-3c} = \frac{2x}{x-3}, \quad \text{vagyis} \quad g(9) = \frac{2 \cdot 9}{9-3} = 3.$$

c) Keressük az összes valós x értéket, amelyre $f(x) = g(x)$, vagyis keressük az $x^2 - 2x = \frac{2x}{x-3}$ egyenlet megoldásait. $(x-3)$ -mal szorozhatunk ($x \neq 3$). Mivel harmadfokú egyenletet kapunk, ezért legfeljebb három megoldást kaphatunk. A műveletek elvégzése és a rendezés után: $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$. A bal oldalon álló kifejezést szorzattá alakíthatjuk: $x(x-1)(x-4) = 0$.

Vagyis az egyenlet gyökei: 0, 1, 4.

6. Az ábrán látható szürkére festett vaskerítés nyolc egymás melletti részén szeretnénk átdobni egy kislabdát. A kerítés 4 cm széles vasrudakból készült. Egy kerítéselem szélessége 164 cm, magassága 78 cm, a labda átmérője 8 cm. Dobásunk véletlenszerűnek tekinthető, de a kerítéselem téglalapját biztosan eltaláljuk (a labda középpontjával).



1. ábra

a) Mekkora valószínűséggel tudjuk átdobni a labdát a kerítés résein úgy, hogy az ne érintkezzen a kerítéssel?

b) Mekkora labda esetén lesz ez a valószínűség 0,5?

(16 pont)

Megoldás. a) Az adatok alapján egy rés mérete 70 cm-szer 16 cm-es téglalap. A labda középpontja ezektől a határvonalaktól legalább 4 cm-re kell, hogy legyen, mert egyébként a labda nekiütözik a vasnak. Vagyis a labda középpontja egy 62 cm-szer 8 cm-es téglalapon haladhat át.

A kerítés elem teljes területe: $T = 78 \cdot 164 = 12\,792$ (cm²). A kedvező rész területe: $t = 8 \cdot 62 \cdot 8 = 3968$ (cm²). A keresett valószínűség:

$$p(\text{jó dobás}) = \frac{3968}{12\,792} \approx 0,31.$$

Vagyis kb. 0,31 valószínűséggel tudjuk átdobni a labdát a kerítés résein.

b) Legyen a labda sugara x cm. Egy rés mérete 70 cm-szer 16 cm-es téglalap. A labda középpontja ezektől a határvonalaktól legalább x cm-re kell, hogy legyen. A labda középpontja egy $(70-2x)$ cm-szer $(16-2x)$ cm-es téglalapon haladhat át. A kerítés elem teljes területe: $T = 12\,792$ cm². Most a kedvező rész területe: $t = 8(70-2x)(16-2x)$ cm². A keresett valószínűség:

$$p(\text{jó dobás}) = \frac{8(70-2x)(16-2x)}{12\,792} = 0,5,$$

$$(70-2x)(16-2x) = 799,5,$$

$$4x^2 - 172x + 320,5 = 0,$$

$$x_{1;2} = \frac{172 \pm \sqrt{172^2 - 5128}}{8} \approx \begin{cases} 41,05, \\ 1,95. \end{cases}$$

Mivel egy rés 16 cm széles, ezért a labda sugara nem lehet nagyobb, mint 8 cm. Vagyis a labda sugara csak az x_2 lehet. Ezek alapján a labda átmérője milliméter pontossággal: 3,9 cm.

7. Adott a koordinátarendszerben az $S(-1; 3)$ és az $L(9; 3)$ pont.

a) Adjuk meg azokat a Z pontokat koordinátáikkal, amelyekre az SZL háromszög derékszögű és a területe 20.

b) Adjuk meg azoknak a $Z(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre $SZ^2 + LZ^2 = 68$.

(16 pont)

Megoldás. a) Három eset lehetséges.

I. eset: a derékszög az S csúcsnál található. Mivel $SL = 10$, ezért $SZ = 4$, hiszen így lesz a háromszög területe 20. Azaz két megfelelő pont létezik: $Z_1(-1; 7)$, $Z_2(-1; -1)$.

II. eset: a derékszög az L csúcsnál van. Az előző esethez hasonlóan kapjuk a következő két pontot: $Z_3(9; 7)$, $Z_4(9; -1)$.

III. eset: a derékszög a Z csúcsnál helyezkedik el. Ekkor a keresett pontok az SL átmérőjű Thalész-körre illeszkednek, továbbá az SL egyenestől 4 egységre párhuzamosan futó egyenesre. Ilyen egyenes kettő van, azaz még négy megfelelő pontot találunk. A Thalész-kör egyenlete: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$, a két egyenes egyenlete pedig $y = 7$, illetve $y = -1$. Ezek alapján a négy pont: $Z_5(1; 7)$, $Z_6(1; -1)$, $Z_7(7; 7)$, $Z_8(7; -1)$.

Vagyis nyolc megfelelő Z pont található.

b) Írjuk fel a két pont távolságára ismert összefüggést:

$$\begin{aligned}SZ^2 + LZ^2 &= [(x + 1)^2 + (y - 3)^2] + [(x - 9)^2 + (y - 3)^2] = 68, \\x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 18x + 81 + y^2 - 6y + 9 &= 68, \\x^2 - 8x + y^2 - 6y &= -16, \\(x - 4)^2 + (y - 3)^2 &= 9.\end{aligned}$$

A keresett ponthalmaz a $K(4; 3)$ középpontú, $r = 3$ sugarú kör.

8. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x} + \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x} + \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{3\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}}. \quad (16 \text{ pont})$$

Megoldás. Tudjuk, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ minden x -re, ezért ennyivel csökkenthetjük mindkét oldal értékét:

$$\sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x} + \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}}.$$

A négyzetgyök alatti kifejezéseket átalakítjuk:

$$\begin{aligned}A &= \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x, \\B &= \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.\end{aligned}$$

Mivel $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, ezért $\frac{1}{4} \leq A \leq 1$ és $\frac{1}{2} \leq B \leq 1$.

Az egyenlet bal oldalán lévő két négyzetgyökös kifejezés minimumértékének összege: $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$, ami $\frac{\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}}$ alakban is írható. Vagyis egyenletünknek akkor van megoldása, ha mindkét négyzetgyökös kifejezés a minimumértéket veszi fel. Ez csak a $\sin^2 2x = 1$ esetén valósul meg, azaz $\sin 2x = 1$ vagy $\sin 2x = -1$. Ebből kapjuk, hogy $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Tehát az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

9. Az $A(1; 0)$, $B(1; 6)$, $C(6; 1)$, $D(6; 0)$ pontok által meghatározott négyszög BC oldalát először helyettesítsük a $K(6; 6)$ középpontú és $r = 5$ sugarú kör B és C közötti rövidebb ívével, másodszor pedig az $f(x) = \frac{6}{x}$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjának a B és C közötti darabjával.

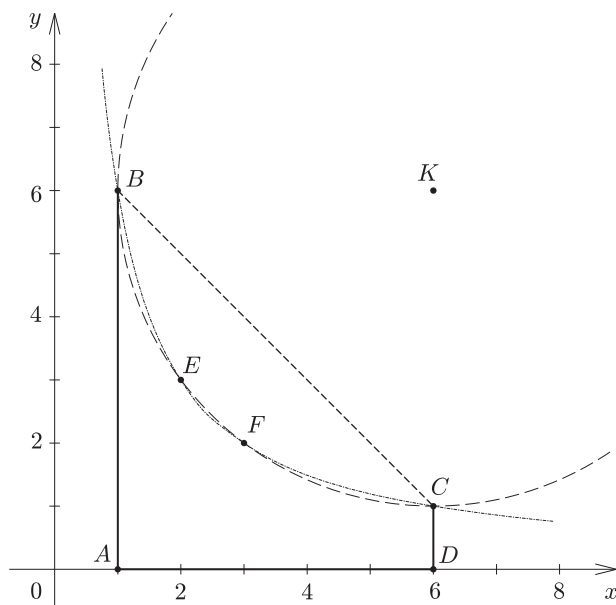
a) Határozzuk meg mindkét esetben az $ABCD$ síkidom területét. Melyik a nagyobb?

b) Adjuk meg a B és C pontokat összekötő két görbe vonal közös pontjainak koordinátáit.

(16 pont)

Megoldás. a) Az első esetben az $ABKD$ téglalapból hiányzik egy K középpontú, $r = 5$ sugarú negyedkör. Vagyis ebben az esetben a terület:

$$T_1 = 5 \cdot 6 - \frac{5^2 \cdot \pi}{4} = \frac{120 - 25\pi}{4} \approx 10,365.$$



A második esetben a területet a következő integrállal számíthatjuk ki:

$$T_2 = \int_1^6 \frac{6}{x} dx = 6 \cdot \int_1^6 \frac{1}{x} dx = 6 \cdot [\ln |x|]_1^6 = 6 \cdot (\ln 6 - \ln 1) = 6 \cdot \ln 6 \approx 10,751.$$

Vagyis a második esethez tartozó síkidom területe a nagyobb 0,386-del.

b) Az első esethez tartozó körív egyenlete: $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$. A BC húrhoz tartozó rövidebb körív, mint grafikon, a következő függvényhez tartozik:

$$g(x) = 6 - \sqrt{25 - (x-6)^2}, \quad \text{ahol } x \in [1; 6].$$

A második esetben az $f(x) = \frac{6}{x}$ hozzárendelésű függvényről van szó, ahol $x \in [1; 6]$. A feladat az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldása az $[1; 6]$ intervallumon:

$$\frac{6}{x} = 6 - \sqrt{25 - (x-6)^2}.$$

A vizsgált intervallumon végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} \sqrt{25 - x^2 + 12x - 36} &= 6 - \frac{6}{x}, \\ x\sqrt{-x^2 + 12x - 11} &= 6x - 6, \\ x^2(-x^2 + 12x - 11) &= 36x^2 - 72x + 36, \\ 0 &= x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36. \end{aligned}$$

A feladat szövegéből következik, hogy az $x_1 = 1$, valamint az $x_2 = 6$ megoldása az egyenletnek (hiszen mindkét görbére illeszkedik a B és a C pont). Ezért az egyenlet a következő alakban is írható: $0 = (x-1)(x-6)(x^2 + ax + b)$. Végezzük el a szorzásokat, az együtthatókat összehasonlítva az előbb kapott negyedfokú egyenlet megfelelő együtthatóival kapjuk, hogy $b = 6$, $a = -5$. Vagyis

$$0 = (x-1)(x-6)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-6)(x-2)(x-3).$$

További két megoldás: $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Tehát a $B(1; 6)$ és a $C(6; 1)$ pontok mellett még két közös pontja van a két görbének: $E(2; 3)$, $F(3; 2)$.