

I. rész

1. A királyfi Csipkerózsikához sietett a toronyba. Először egyesével, majd kettesével, végül már hármasával vette a lépcsőfokokat a 232 fokos csigalépcsőn. Ha az elején lépett volna hármasával, majd kettesével, végül egyesével rendre ugyanennyit, akkor egy 276 fokos lépcsősor tetejére is feljuthatott volna.

a) Mennyit lépett a királyfi, míg felért a lépcső tetejére?

b) Hány lépcsőt lépett egyesével, ha kettesével másfélszer annyit lépett, mint hármasával? (10 pont)

Megoldás. a) Legyen az egyesével tett lépések száma x , a kettes lépéseké y , a hármasoké z . A feladat szövege szerint:

$$x + 2y + 3z = 232, \quad 3x + 2y + z = 276.$$

Adjuk össze a két egyenletet, és osszunk 4-gyel: $x + y + z = 127$. Vagyis 127 lépéssel ért fel a lépcső tetejére.

b) Tudjuk, hogy $y = 1,5z$. A három ismeretlenre így már három egyenletünk van. Ennek megoldása: $x = 52$, $y = 45$, $z = 30$. Tehát a királyfi 52 lépcsőt lépett egyesével.

2. Három kétjegyű prímszám egy számtani sorozat három egymást követő tagja. Az összegük olyan háromjegyű szám, melyben a számjegyek egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagját adják. A számjegyek közötti különbségnek a másfélszerese a prímszámok közötti különbség. Melyik ez a három prímszám? (13 pont)

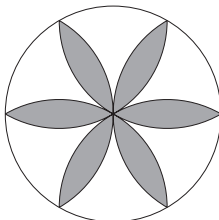
Megoldás. Mivel a prímszámok kétjegyűek, így az összegük 300-nál kisebb, és tudjuk, hogy a számjegyek is számtani sorozatot alkotnak. Ilyen háromjegyű számok a következők: 123, 135, 147, 159, 234, 246, 258. Az összeg harmada adja a középső prímszámot. A harmadolás után csak két esetben kapunk prímszámot: 123, 159.

I. eset: Ha az összeg 123, akkor a középső prímszám a 41. Mivel a számjegyek különbsége 1, ezért a prímeknél 1,5 lesz a különbség. Ezek alapján nem kapunk egész számokat.

II. eset: Ha az összeg 159, akkor a középső prímszám az 53. Mivel a számjegyek különbsége 4, ezért a prímeknél 6 lesz a különbség.

Ezek alapján a három szám: 47, 53, 59, és ezek mindegyike prímszám, vagyis megfelel a feladat feltételeinek.

3. Bori a körzőjével hatszirmú virágot szerkesztett az ábrán látható módon, majd kiszínezte.



a) Mekkora nyitotta a körzőjét Bori, ha a hatszirmú virág határvonalának hossza 18π cm-ben?

b) A kör területének hány százalékát színezte ki? (14 pont)

Megoldás. a) Legyen a kör sugara r , ekkor kerülete $K = 2r\pi$. A virág egy szirmjának egyik íve a kör 60° -os középponti szögéhez tartozó ív hosszával egyenlő, tehát a kör területének hatoda. A virág 12 db ugyanekkora ívből áll. Tehát összesen a kör területének kétszerese a virág határvonalának hossza, azaz: $2K = 4r\pi = 18\pi$. Ebből $r = 4,5$.

Vagyis 4,5 cm-re nyitotta ki Bori a körzőjét.

b) A kör területe: $T = r^2\pi$. A virág egy szirmjának (a kör sugara által levágott) fele a kör 60° -os középponti szögéhez tartozó körszelet. A körszelet ívének hossza: $i = \frac{2r\pi}{6} = \frac{r\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} T_{\text{körszelet}} &= \frac{ir}{2} - \frac{r^2 \sin 60^\circ}{2} = \frac{\frac{r\pi}{3}r}{2} - \frac{r^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}), \\ T_{\text{virág}} &= 12 \cdot T_{\text{körszelet}} = r^2(2\pi - 3\sqrt{3}), \\ \frac{T_{\text{virág}}}{T} &= \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{r^2\pi} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{\pi} \approx 0,346. \end{aligned}$$

Tehát kb. a kör 34,6%-át színezte ki Bori.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_5(x-2) + \log_{25}(4x^3 + 29x^2 + 16x) = \log_5(x^3 - 8). \quad (14 \text{ pont})$$

Megoldás. A feladat értelmezési tartománya: $x > 2$. A logaritmus azonosságait és a logaritmus függvény kölcsönös egyértelműségét felhasználva:

$$\begin{aligned}\frac{\log_5(4x^3 + 29x^2 + 16x)}{\log_5 25} &= \log_5(x^3 - 8) - \log_5(x - 2), \\ \frac{\log_5(4x^3 + 29x^2 + 16x)}{2} &= \log_5(x^2 + 2x + 4), \\ \log_5(4x^3 + 29x^2 + 16x) &= \log_5(x^2 + 2x + 4)^2, \\ 4x^3 + 29x^2 + 16x &= x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16, \\ 0 &= x^4 - 17x^2 + 16.\end{aligned}$$

Ez x^2 -re másodfokú egyenlet, a gyökök: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -4$, $x_4 = 4$, melyek közül csak az $x = 4$ a megoldás az értelmezési tartomány miatt.

II. rész

5. Adott a síkon 2011 egyenes, melyek között nincsenek párhuzamosok, továbbá 1011 egyenes átmegy a sík P pontján. A P -n kívül a sík egyetlen pontjára sem illeszkedik kettőnél több egyenes.

- Hány metszéspontja van a 2011 egyenesnek?
- Mekkora valószínűséggel van 3 véletlenszerűen választott egyenesnek közös pontja?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy 3 véletlenszerűen választott egyenes egy háromszög három oldalegyenese?
- Az egyenesek közül kiválasztunk ötöt. Az általuk meghatározott tartományokat kiszínezzük a lehető legkevesebb színnel úgy, hogy az élben szomszédos részek ne legyenek azonos színűek. Hány színre lesz szükségünk? (16 pont)

Megoldás. a) A 2011 darab egyenesnek $\binom{2011}{2}$ metszéspontja lehet maximálisan. Most ebből 1011 egyenesnek az $\binom{1011}{2}$ metszéspontja helyett csak egy metszéspont van. Ezek szerint a metszéspontok száma: $\binom{2011}{2} - \binom{1011}{2} + 1 = 1\,510\,501$.

A feltételeknek megfelelő 2011 darab egyenesnek 1 510 501 metszéspontja van.

b) Véletlenszerűen választunk három egyenest, ekkor az összes lehetőségek száma: $\binom{2011}{3}$. Csak az a kedvező, ha az 1011-ből választunk hármat. A kedvező esetek száma: $\binom{1011}{3}$.

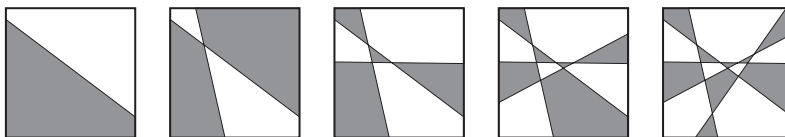
A keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{1011}{3}}{\binom{2011}{3}} \approx 0,127.$$

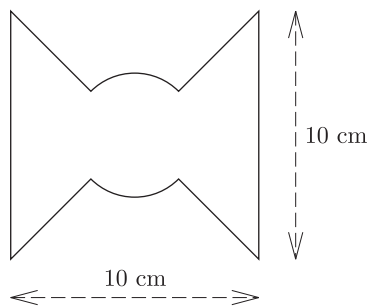
c) Mivel közülük semelyik kettő nem párhuzamos, azért ha a három egyenes nem egy pontban metszi egymást, akkor háromszöget határoznak meg.

Tudjuk, hogy a véletlenszerűen választott három egyenes kb. 0,127 valószínűséggel metszi egy pontban egymást, ezért annak valószínűsége, hogy a három egyenes egy háromszög három oldalegyenese lesz, 0,873.

d) Egy egyenes a síkot két részre osztja, ekkor két szín biztosan elég a színezéshez. Ezután egy újabb egyenes hozzávételekor mindig az egyik felsík összes darabjának színét ellenkezőjére változtatjuk, így biztosítva, hogy a szomszédos területek továbbra is különböző színűek maradjanak. Tehát a színezéshez két szín elég.



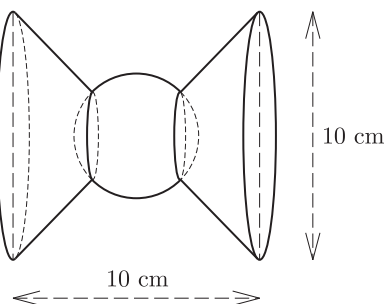
6. Egy esztergályos megrendelést kapott forgásszimmetrikus díszítőelemek készítésére. A megrendelő az ábrán látható tengelymetszetet adta le, de elfelejtette bejelölni a forgástengelyt.



A díszítőelemeket olyan hengerből kell elkészíteni, amelyek átmérője és magassága is 10 cm, a kész elem közepén látható gömb átmérője pedig 5 cm. Az esztergályos mindkét lehetséges változatból elkészített egy-egy mintapéldányt. Hány százalék a hulladék az egyes esetekben? (16 pont)

I. megoldás. Mindkét esetben ugyanakkora a kiindulásnak vett henger térfogata: $V_{\text{henger}} = 5^2 \pi \cdot 10 = 250\pi \approx 785,40$, és a gömb térfogata:

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4\pi}{3} 2,5^3 = \frac{62,5\pi}{3} \approx 65,45.$$

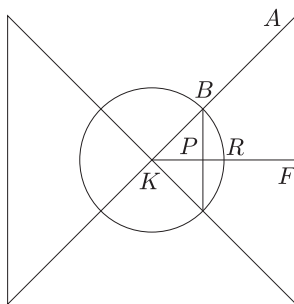


1. eset: A forgástengely vízszintes. Ennek a változatnak a térfogata:

$$V_1 = 2V_{\text{csonkakúp}} + V_{\text{gömb}} - 2V_{\text{gömb szelet}}.$$

A csonkakúp alapkörének sugara megegyezik a henger sugarával, vagyis 5 cm. Meg kell határoznunk a magasságának és a fedőkör sugarának a hosszát.

Használjuk a keresztmetszetről készített ábra jelöléseit.



A KPB és a KFA egyenlőszárú derékszögű háromszögek, ezért hasonló. Tudjuk, hogy $AF = 5$, $KA = 5\sqrt{2}$, $KB = 2,5$, így a megfelelő oldalak aránya: $\frac{BP}{2,5} = \frac{5}{5\sqrt{2}}$. Ebből kapjuk a csonkakúp fedőkörének sugarát: $BP = 1,25\sqrt{2}$.

A háromszögek egyenlőszárúságát felhasználva a csonkakúp magassága is kifejezhető: $PF = KF - KP = 5 - 1,25\sqrt{2}$.

A csonkakúp térfogata:

$$V_{\text{csonkakúp}} = \frac{\pi}{3} (5 - 1,25\sqrt{2}) [5^2 + 5(1,25\sqrt{2}) + (1,25\sqrt{2})^2] \approx 125,11.$$

A gömb sugara: $KB = 2,5$, a gömbszelet magassága: $PR = KR - KP = 2,5 - 1,25\sqrt{2}$. A gömbszelet térfogata:

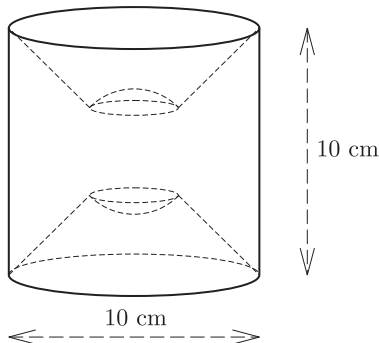
$$V_{\text{gömb szelet}} = \frac{\pi}{3} (2,5 - 1,25\sqrt{2})^2 [3 \cdot 2,5 - (2,5 - 1,25\sqrt{2})] \approx 3,80.$$

A kapott eredmények felhasználásával:

$$V_1 = 2V_{\text{csanakakúp}} + V_{\text{gömb}} - 2V_{\text{gömbszelet}} = 2 \cdot 125,11 + 65,45 - 2 \cdot 3,80 = 308,07,$$

$$\frac{V_1}{V_{\text{henger}}} = \frac{308,07}{785,40} \approx 0,3922.$$

Tehát az első esetben az anyagvesztés kb. 60,78%-os.



2. eset: A forgástengely függőleges. Ennek a változatnak a térfogata:

$$V_2 = V_{\text{henger}} - 2V_{\text{csanakakúp}} + 2V_{\text{gömbszelet}}.$$

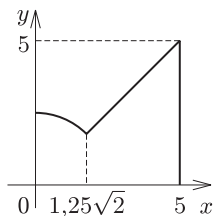
Az előző rész eredményeit felhasználva:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_{\text{henger}} - 2V_{\text{csanakakúp}} + 2V_{\text{gömbszelet}} = \\ &= 785,40 - 2 \cdot 125,11 + 2 \cdot 3,80 = 542,78, \end{aligned}$$

$$\frac{V_2}{V_{\text{henger}}} = \frac{542,78}{785,40} = 0,6911.$$

Tehát a második esetben az anyagvesztés 30,89%-os.

II. megoldás. 1. eset: A forgástengely vízszintes.



A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = 6,25$ (ahol $0 \leq x, y \leq 2,5$), ebből $y = \sqrt{6,25 - x^2}$. Az egyenes egyenlete: $y = x$. A kör és az egyenes metszéspontja: $(1,25\sqrt{2}; 1,25\sqrt{2})$.

A forgástest térfogatát integrállal határozzuk meg:

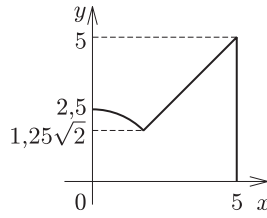
$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi \left(\int_0^{1,25\sqrt{2}} (6,25 - x^2) dx + \int_{1,25\sqrt{2}}^5 x^2 dx \right) = \\ &= 2\pi \left(\left[6,25x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{1,25\sqrt{2}} + \left[\frac{x^3}{3} \right]_{1,25\sqrt{2}}^5 \right) = \\ &= 2\pi \left(6,25 \cdot 1,25\sqrt{2} - \frac{(1,25\sqrt{2})^3}{3} + \frac{5^3}{3} - \frac{(1,25\sqrt{2})^3}{3} \right) \approx 308,08. \end{aligned}$$

Az eredeti henger térfogata: $V_{\text{henger}} = 5^2\pi \cdot 10 = 250\pi \approx 785,40$.

$$\frac{V_1}{V_{\text{henger}}} = \frac{308,08}{785,40} \approx 0,3922.$$

Tehát az első esetben az anyagveszteség kb. 60,78%-os.

II. eset: A forgástengely függőleges.



A forgástest térfogatát integrállal határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
 V_2 &= 2\pi \left(\int_0^5 25 dy - \int_{1,25\sqrt{2}}^5 y^2 dy + \int_{1,25\sqrt{2}}^{2,5} (6,25 - y^2) dy \right) = \\
 &= 2\pi \left([25y]_0^5 - \left[\frac{y^3}{3} \right]_{1,25\sqrt{2}}^5 + \left[6,25y - \frac{y^3}{3} \right]_{1,25\sqrt{2}}^{2,5} \right) = \\
 &= 2\pi \left(25 \cdot 5 - \frac{5^3}{3} + \frac{(1,25\sqrt{2})^3}{3} + 6,25 \cdot 2,5 - \frac{2,5^3}{3} - 6,25 \cdot 1,25\sqrt{2} + \frac{(1,25\sqrt{2})^3}{3} \right) \approx \\
 &\approx 542,77.
 \end{aligned}$$

Az eredeti henger térfogata: $V_{\text{henger}} \approx 785,40$.

$$\frac{V_2}{V_{\text{henger}}} = \frac{542,77}{785,40} \approx 0,6911.$$

Tehát a második esetben az anyagveszteség kb. 30,89%-os.

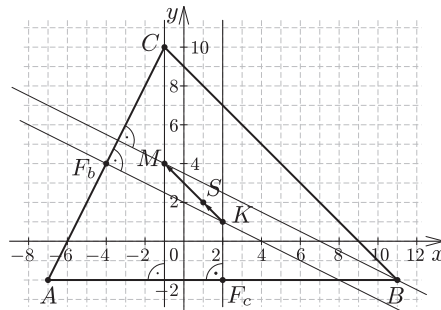
7. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-7; -2)$, $B(11; -2)$, $C(-1; 10)$.

a) Adjuk meg a háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra található K pont koordinátáit.

b) Adjuk meg a háromszög M magasságpontjának koordinátáit.

c) Igazoljuk számítással, hogy az ABC háromszögben az S súlypont harmadolja az MK szakaszt. (16 pont)

Megoldás. A megoldás során a mellékelt ábra jelöléseit használjuk.



a) A K pont az oldalfelező merőlegesek metszéspontjában található. Írjuk fel a c oldalhoz tartozó f_c felezőmerőleges egyenletét. Ennek az egyenesnek egyik pontja az AB oldal felezőpontja: $F_c(2; -2)$. Mivel a c oldal párhuzamos az x tengellyel, ezért az f_c egyenes az y tengellyel lesz párhuzamos, így egyenlete: $x = 2$.

Írjuk fel a b oldalhoz tartozó f_b felezőmerőleges egyenletét is. Ennek az egyenesnek egyik pontja az AC oldal felezőpontja: $F_b(-4; 4)$. Az f_b egyenes egy normálvektora: $\overrightarrow{AC}(6; 12)$, aminek számolhatunk a hatodával. Vagyis az f_b egyenes egyenlete: $x + 2y = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 4$, amiből $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Az f_c és f_b egyenesek egyenletéből kapjuk: $K(2; 1)$.

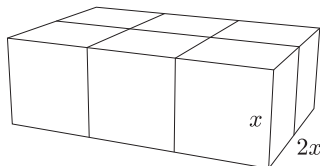
b) Az M magasságpont a háromszög magasságainak metszéspontja. Írjuk fel a c oldalhoz tartozó m_c magasság egyenesének egyenletét. Ennek egyik pontja $C(-1; 10)$, és merőleges a c oldalra, ezért egyenlete: $x = -1$.

Írjuk fel a b oldalhoz tartozó m_b magasság egyenesének egyenletét. Ennek egyik pontja $B(11; -2)$, és merőleges a b oldalra, tehát normálvektora megegyezik az oldalfelező merőleges normálvektorával. Vagyis az m_b egyenes egyenlete: $x + 2y = 1 \cdot 11 + 2 \cdot (-2)$, amiből: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Az m_c és m_b egyenesek egyenletéből kapjuk: $M(-1; 4)$.

c) A súlypont koordinátáit a csúcspontok megfelelő koordinátáinak számtani közepe adja, vagyis: $S(1; 2)$. Mivel $M(-1; 4)$ és $K(2; 1)$, ezért $\vec{MS}(2; -2)$, illetve $\vec{SK}(1; -1)$. A két vektorra: $\vec{MS} = 2\vec{SK}$, tehát az S pont az MK szakasz K végpontjához közelebbi harmadolópont.

8. Anna ajándékba olyan 56 dm^3 térfogatú csomagot kapott, melynek csomagolásához (az ábrán látható módon) a lehető legkevesebb zsineget használták. Mekkora a téglatest alakú doboz éleinek hossza, ha az egyik alapélének hossza egyenlő a magasság kétszeresével az ábra szerint? (16 pont)



Megoldás. A téglatest élei legyenek x , $2x$, y . A zsineg hosszúsága a téglatest éleinek függvényében: $l(x, y) = 6x + 4 \cdot 2x + 2y = 14x + 2y$, ahol $x, y > 0$.

Az ajándék térfogata: $V = 56 = 2x^2y$. Ebből kifejezzük y -t: $y = \frac{28}{x^2}$, és behelyettesítjük a zsineg hosszúságát leíró függvénybe:

$$l(x) = 14x + 2y = 14x + \frac{56}{x^2},$$

ahol $x > 0$. Ennek a függvénynek keressük a minimumát.

Az l függvény deriváltja:

$$l'(x) = 14 - \frac{112}{x^3}.$$

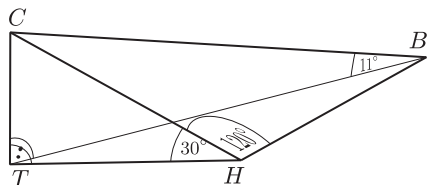
Az l függvénynek ott lehet minimuma, ahol a derivált függvény értéke nulla, azaz: $14 - \frac{112}{x^3} = 0$, ebből $x = 2$. Mivel itt a derivált negatívból pozitívba vált, ezért ezen a helyen a függvénynek valóban minimuma van.

Ezt visszahelyettesítve kapjuk a doboz éleinek hosszát: 2 dm, 4 dm és 7 dm.

9. Az azonos tengerszint feletti magasságban fekvő Hencida és Boncida között a távolság 5 km. Hencidából egy közeli hegy csúcsa 30° -os, Boncidából pedig 11° -os szögben látszik. Hencidából a hegy csúcsát és Boncidát összekötő szakasz látószöge 120° -os.

a) Mennyivel van magasabban a hegy csúcsa a két város szintjéhez képest?

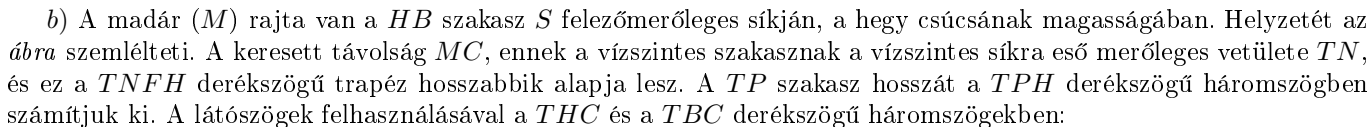
b) A két várost összekötő egyenes út felénél felröppen egy madár. Röppályájának minden pontja egyenlő távolságra van a két várostól. Mennyire közelítheti meg röpködés közben a hegy csúcsát? (16 pont)



Megoldás. a) Az ábrán látható jelöléseket használjuk. A hegy magassága x . A CTH derékszögű háromszögben $\sin 30^\circ = \frac{x}{a}$, ebből $a = 2x$. Ugyanígy a CTB derékszögű háromszögben $\sin 11^\circ = \frac{x}{b}$, ebből $b = \frac{x}{\sin 11^\circ} \approx 5,24x$. Írjuk fel a CHB háromszögben a koszinusztételt a b oldalra, majd helyettesítsük be az imént kapott összefüggéseket:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + 5^2 - 2 \cdot a \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ, \\ (5,24x)^2 &= (2x)^2 + 25 - 2 \cdot 2x \cdot 5 \cdot (-0,5), \\ 27,4576x^2 &= 4x^2 + 25 + 10x, \\ 23,4576x^2 - 10x - 25 &= 0. \end{aligned}$$

Ebből: $x_1 \approx -0,841$ (ami nem megoldás, mert a magasság csak pozitív lehet), $x_2 \approx 1,267$. Tehát a hegy 1267 méter magas.



A THB háromszögben a koszinusztétel alapján:

ebből $\cos(\alpha + 90^\circ) \approx -0,5771$, azaz $\alpha + 90^\circ \approx 125,25^\circ$, vagyis $\alpha = 35,25^\circ$, továbbá a TPH háromszögben $TP = TH \cdot \sin \alpha = 2,195 \cdot 0,5771 \approx 1,267$, $TN = TP + PN = 1,267 + 2,5 = 3,767$. Tehát a madár a hegycsúcsot 3767 méterre közelítheti meg.