

A 2010. évi WILLIAM LOWELL PUTNAM verseny feladatai¹

A1. Adott n pozitív egészre melyik az a legnagyobb k , amelyre a $1, 2, \dots, n$ számokat el lehet helyezni k dobozban úgy, hogy minden dobozban ugyanannyi legyen a számok összege? ($n = 8$ esetén a $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{4, 8\}$, $\{5, 7\}$ példa mutatja, hogy k legalább 3.)

A2. Határozzuk meg az összes olyan differenciálható $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden x valós szám és minden n pozitív egész esetén

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}.$$

A3. Tegyük fel, hogy a $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény parciálisan deriválható és a parciális deriváltak folytonosak, továbbá, hogy a függvény valamely a, b konstansok esetén kielégíti a

$$h(x, y) = a \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$$

egyenletet. Bizonyítsuk be, hogy ha létezik olyan M konstans, amelyre minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén $|h(x, y)| \leq M$, akkor h azonosan egyenlő nullával.

A4. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész, akkor $10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$ nem prímszám.

A5. Tekintsük a G halmaz és a $*$ művelet által meghatározott csoportot. Tegyük fel, hogy

(i) G részhalmaza $\mathbb{R}^3$ -nek (de a $*$ művelet nem szükségképpen kötődik a vektorösszeadáshoz);

(ii) Minden $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ esetén $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ (vagy mindkettő), ahol $\times$ a szokásos $\mathbb{R}^3$ -beli vektoriális szorzás művelete.

Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ esetén $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$.

A6. Az $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton csökkenő folytonos függvényre $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^\infty \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx$$

divergens.

B1. Létezik-e olyan valós számokból álló $a_1, a_2, a_3, \dots$ végtelen sorozat, amelyre minden m pozitív egész esetén

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots = m?$$

B2. Az A, B és C pontok nincsenek egy egyenesen, koordinátáik egész számok, és az AB, AC és BC távolságaik is egészek. Mennyi AB legkisebb lehetséges értéke?

B3. Van 2010 darab $B_1, B_2, \dots, B_{2010}$ feliratú dobozunk, amelyekben $2010n$ számú golyó van szétosztva, ahol n pozitív egész. A golyókat lépések sorozatával átrendezhetjük a dobozok között. Minden lépésben választunk egy i számot, és a B_i feliratú dobozból pontosan i darab golyót áthelyezünk valamelyik másik dobozba. n mely értékeire tudjuk a golyók eredeti elrendezésétől függetlenül elérni, hogy mindegyik dobozban n darab golyó legyen?

B4. Határozzuk meg az összes olyan $p(x), q(x)$ valós együtthatós polinompárt, amelyre

$$p(x)q(x+1) - p(x+1)q(x) = 1.$$

B5. Létezik-e olyan szigorúan monoton növekvő $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f'(x) = f(f(x))$ minden x esetén?

B6. Legyen $n \geq 1$, és legyenek az $n \times n$ -es A mátrix elemei valós számok. Az $A^{[k]}$ mátrixot minden k pozitív egészre úgy kapjuk, hogy a mátrix minden elemét k -adik hatványra emeljük. Bizonyítsuk be, hogy ha $k = 1, 2, \dots, n+1$ esetén $A^k = A^{[k]}$, akkor minden $k \geq 1$ esetén $A^k = A^{[k]}$.

¹A versenyről megjelent ismertetés lapunk 2005/2. számában olvasható, a 71–72. oldalon. A verseny honlapja: <http://math.scu.edu/putnam/index.html>, a megoldások a <http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml> honlapon találhatók.