

Nyomozás a Spirál-családban

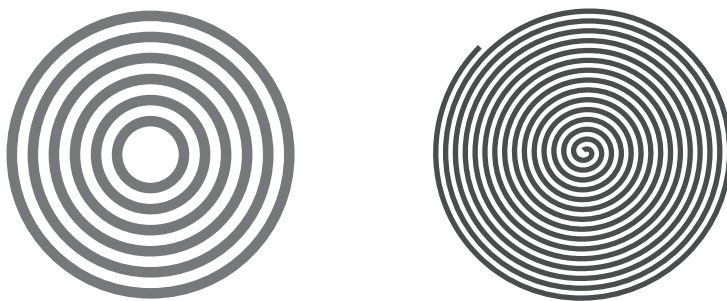
1. Bevezetés

Ezen cikk a spirálok világában való eligazodásban nyújthat segítséget: megkísérli kitisztítani a néhol hallható és olvasható fogalomzavarokat, a felületességből eredő homályos, összemosó, sőt hibás kijelentéseket.

Kalandra hívja az olvasót: rendszerezzük mind történetileg, mind matematikailag a legfontosabb spirálokat, és – ha kedvünk van hozzá – találjunk ki magunk is hasonlót, vagy leljünk örömet megrajzolásukban, szerkesztésükben. Végül – legmélyebben fekvő „szeletként” – fényt derítünk a címben ígért rokonságra.

2. A kezdetek

A *kozmosz* legősibb megjelenítése (például a hinduizmusban vagy egyes indián törzseknél) különböző alakzatokkal történt (1. ábra).



1. ábra

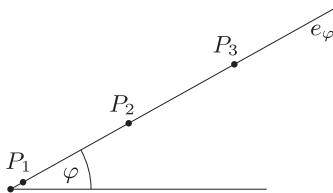
Mindkettőnél a „nem látható” közép a *lényeg*, a bármennyigéig tághatóság pedig a *világegyetem végtelenérzetét* jelképezi. Geometriailag azonban *lényegesen* különböznek egymástól. Az 1. ábra jobboldali alakzata nem koncentrikus körökből áll, hanem spirál: síkbeli folytonos görbe.

Nemcsak szimbólumként, hanem a matematikai megközelíthetőség tárgyaként is vissza-visszatérnek az évszázadok során a spirálok. Kr.e. 225-ből való *Arkhimédész* leírása arról a fajta spirálról, amely azóta is az ő nevét viseli.

Mai terminológiát használva az *arkhimédészi spirál* egy polárkoordinátákkal megadott egyenlettel meghatározott görbe:

$$r = a\varphi,$$

ahol r a kiinduló ponttól (origótól) mért távolság; φ az elfordulás szöge (az x -tengely pozitív felével bezárt forgásszög); a tetszőleges pozitív állandó, amely a spirál jellegét (sűrűségét) határozza meg.

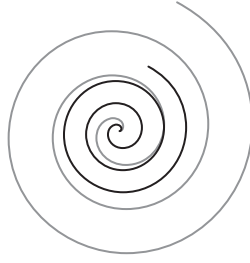


$$P_1(r_1; \varphi), P_2(r_2; \varphi + 2\pi), P_n(r_n; \varphi + (n-1)2\pi), \dots, \text{ ahol } r_i = a[\varphi + (i-1)2\pi]$$

Az *Arkhimédész-féle spirál* ágai közti távolság az a értékétől függő állandó. (Minél kisebb az $a \neq 0$ értéke, annál sűrűbbek az ágai.) Ugyanis:

$$r_n - r_{n-1} = a[\varphi + (n-1)2\pi] - a[\varphi + (n-2)2\pi] = 2a\pi.$$

Szabadkézzel úgy rajzolhatjuk meg, hogy az első körben minél több értéket kiszámítva, kialakítjuk a kezdő formát, majd az e_φ félegyenesekre a $2a\pi$ közelítő értékének megfelelő távolságot P_1 -től kezdve felmérjük. Az így kapott spirálpontokat összekötjük.



2. ábra

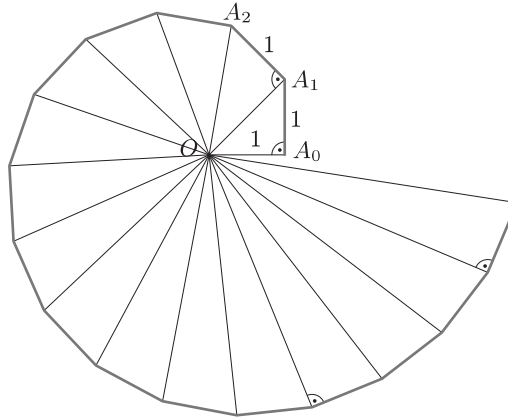
A 2. ábrán a szürkével rajzolt spirálnál $a = \frac{1}{2}$, a feketénél $a = \frac{1}{4}$. Így az ágak közti távolság az alábbi, a rajzolást segítő táblázat utolsó oszlopában megjelenő érték:

	φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
szürke: $r = \frac{1}{2}\varphi$		0	0,3	0,5	0,8	1	1,3	1,5	1,8	2,1	2,3	2,6	2,8	3,1
fekete: $r = \frac{1}{4}\varphi$		0	0,1	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,3	1,4	1,6

Ezt a görbét közelítő értékekkel felvett véges sok pont szabadkézi összekötésével rajzoltuk meg, így – természetesen – euklidészi szerkesztésről nem beszélhetünk.

3. Szerkesszünk spirált!

3.a. Spirált pontosan is szerkeszthetünk. Szakaszokból áll a rekurzív-módon megadott ún. *négyzetgyök-spirál*. Induljunk ki egy egyenlő szárú derékszögű háromszögből (3. ábra): $OA_0A_1\triangle$, amelyben $OA_0 = A_0A_1 = 1$ egység. Majd illesszük hozzá az OA_1A_2 derékszögű háromszöget, amelyben $A_1A_2 = 1$ egység. Ez az eljárás bármennyig folytatható. Legyen $OA_i = a_i$, ekkor $a_i^2 = a_{i-1}^2 + 1$.



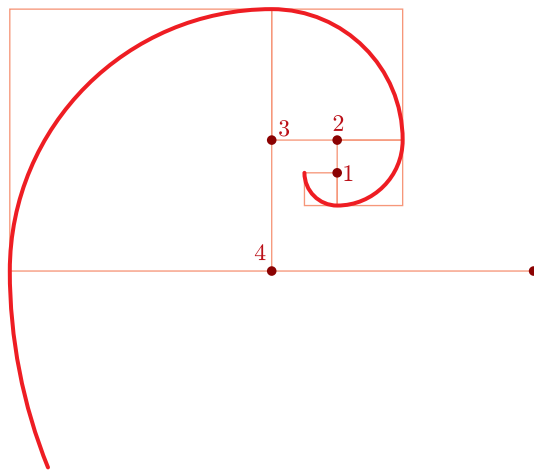
3. ábra

Nevét onnan kapta, hogy igaz rá az a tulajdonság, hogy $a_{n-1} = \sqrt{n}$, azaz bármely természetes szám négyzetgyökének megfelelő hosszúságú szakaszt – elvileg – megszerkeszthetünk ezzel a módszerrel. A bizonyítás teljes indukcióval könnyen elvégezhető: $a_0 = 1$ és $a_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

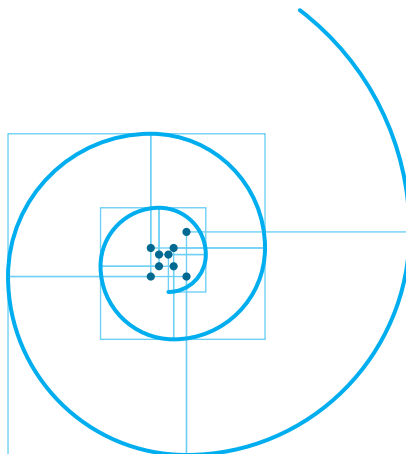
Tegyük fel, hogy $a_{k-2} = \sqrt{k-1}$. Ekkor

$$(a_{k-1})^2 = (a_{k-2})^2 + 1 = k - 1 + 1 = k, \quad \text{tehát} \quad a_{k-1} = \sqrt{k}.$$

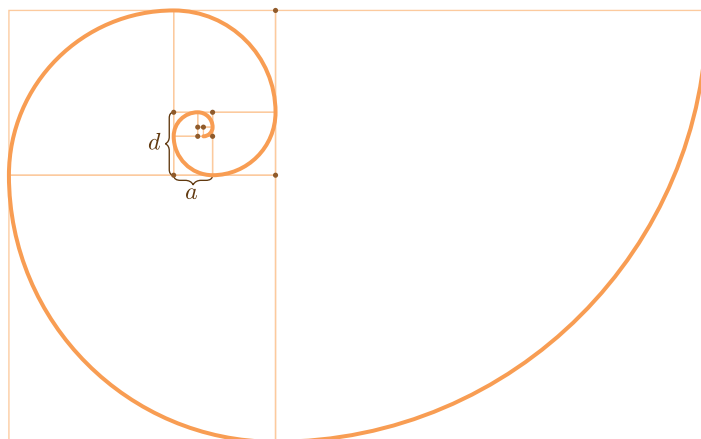
3.b. Szakaszok helyett *körívekből* is létrehozhatunk *pontosan* szerkeszthető spirált. Kiindulásul válasszunk egy négyzetet vagy egy egyenlőszárú (nem derékszögű) háromszöget és egy $q > 1$ valós számot (4. ábra).



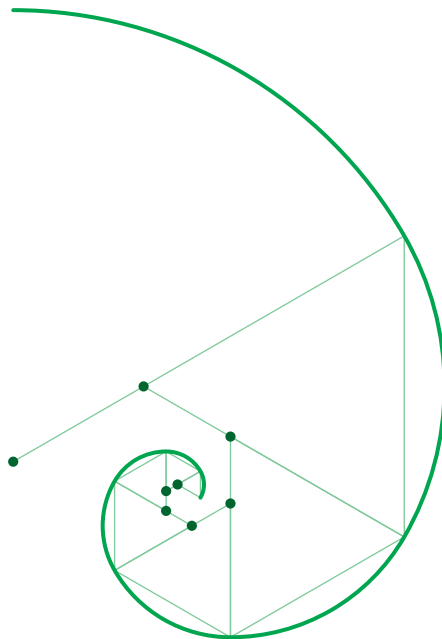
4.a. ábra. $q = 2$



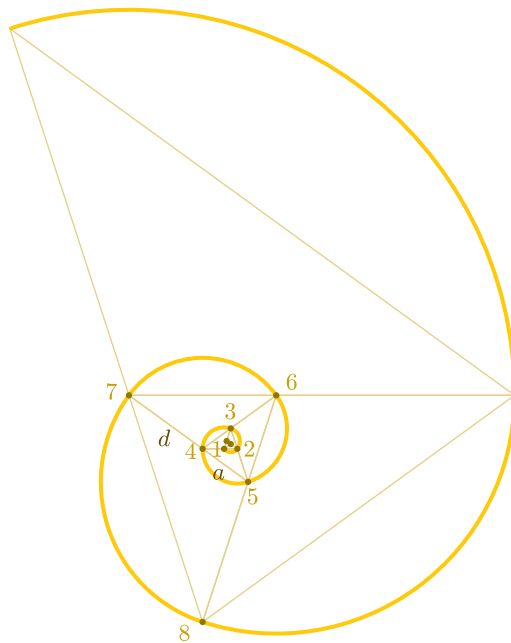
4.b. ábra. $q = \frac{5}{4}$



4.c. ábra. $q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$



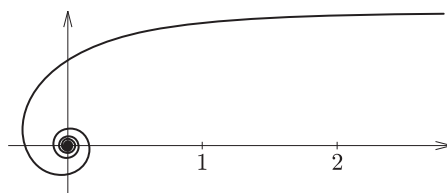
4.d. ábra. A háromszög szárszöge 60° és $q = \frac{3}{2}$



4.e. ábra. A háromszög szárszöge 108° és $q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

A 4. ábra mindegyik spiráljánál a körívek sugarai q hányadosú mértani sorozatot alkotnak. Kitüntetett szerepű a 4.c. és az 4.e. „aranyspirál”, ahol a körsugarak $a, d, a + d, a + 2d, 2a + 3d, \dots$ szabály szerint követik egymást (ún. Fibonacci-sorozat, amelyben $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$). Ez utóbbi spirálok – a mértani közép tulajdonság miatt – „gyorsan táguló” formájúak.

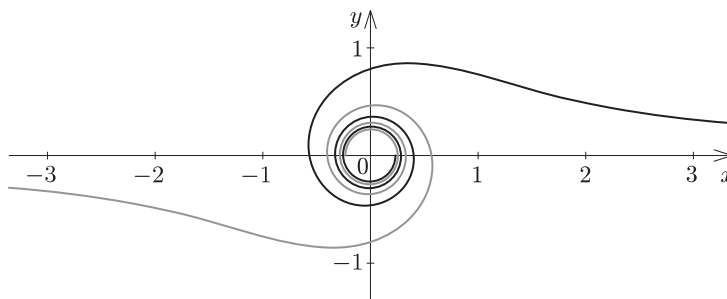
3.c. „Gyorsan örvénylő” spirált rajzolhatunk, ha az Arkhimédész-féle $\frac{r}{\varphi} = \text{állandó}$ szabályt $r\varphi = \text{állandó}$ -ra változtatjuk. Az $r\varphi = a$ polárkoordinátás egyenlettel megadott alakzatot – természetesen – ismét csak közelítő módszerrel vázolhatjuk fel (5. ábra, $a = 1$).



5. ábra

Az 5. ábrán látható spirálnak nem lehet kezdőpontja, hiszen $r \neq 0$, és $\varphi \rightarrow \infty$ esetén megfelelő pontjai egyre közelebb kerülnek az origóhoz. Ez indokolja a *hiperbolikus spirál* elnevezését.

Hasonló jellegű, de *kettős spirál* rajzolható, ha $r = \frac{a}{\varphi}$ helyett az $r^2 = \frac{a^2}{\varphi}$ egyenletből indulunk ki (6. ábra, $a^2 = 1$).



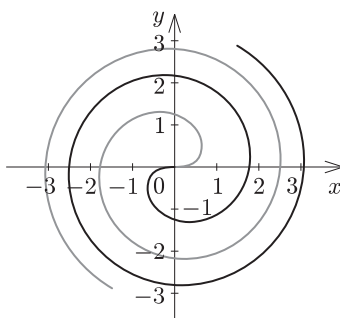
6. ábra

A csavarodó, majd kissé hajlottan elnyúló forma emlékeztet a római madárjósok görbe botjára, a „lituus”-ra. Innen kapta ez a fajta spirál a *lituus* nevet.

4. Fermat és Descartes

4.a. A 17. század elején élt Toulouse-ban egy jogász, aki minden idejét és energiáját a matematikának szentelte: az újabb és újabb kérdések izgalma és a gondolkodás élvezete hajtotta. *Pierre Fermat* jogtanácsos nem mozdult ki városából, nem publikálta tételeit, feljegyzései és levelei maradtak fenn csak. Pascallal valószínűségi problémákról, Descartes-tal pedig az algebra és a geometria egyesítésével kapcsolatos gondolatairól – az analitikus geometriáról – levelezett. Ezekből a levélváltásokból született meg a matematika két új fejezete. Fermat a „legszeniálisabb amatőr”-ként él a matematika történetében. Nevét, többek között, egy általa kidolgozott spirál is őrzi.

A *Fermat-féle spirál* az archimédészi-ből képez új kettős spirált az $r^2 = a^2\varphi$ egyenlettel (7. ábra, $a = 1$). Ezt a spirált az archimédészi-től eltérően, nem azonos távolságú, hanem „lassan sűrűsödő” ágak alkotják.



7. ábra

Tekintsük ugyanis a 7. ábrán látható görbének a

$$P_1(r_1; \varphi), \quad P_2(r_2; \varphi + 2\pi), \quad \dots, \\ P_i(r_i; \varphi + (i-1)2\pi)$$

pontjait, ahol $r_i = a\sqrt{\varphi + (i-1)2\pi}$. Vizsgáljuk az $\frac{r_{i+1}}{r_i}$ hányadost:

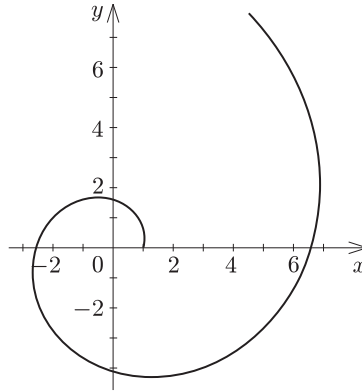
$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \sqrt{\frac{\varphi + i2\pi}{\varphi + (i-1)2\pi}} = \sqrt{1 + \frac{2\pi}{\varphi + (i-1)2\pi}}.$$

Mivel i értékét növelve a $\frac{2\pi}{\varphi + (i-1)2\pi}$ tört értéke egyre kisebb, azért $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{r_{i+1}}{r_i} = 1$ ($i \rightarrow \infty$), ami éppen a sűrűsödést jelenti.

4.b. *Descartes* – a levelezőtárs – is megalkotta a maga spirálját. Az ő definíciója azonban *alapvetően különbözik az összes eddigétől*, ahol r , illetve r^2 és φ között egyenes- vagy fordított arányosság-jellegű kapcsolat áll fenn. A *Descartes-féle spirál egyenlete*:

$$\begin{aligned} r &= a \cdot e^{k\varphi} \quad (a > 0; k \neq 0), \\ \ln r &= \ln a + k\varphi, \\ \varphi &= \frac{1}{k} \ln \frac{r}{a}. \end{aligned}$$

E sorok indokoltá teszik a *logaritmikus spirál* elnevezést (8. ábra).



8. ábra

A szabadkézi rajzolást segítő táblázat ($a = 1$; $k = 0,3$):

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$
$e^{0,3\phi}$	1	1,2	1,4	1,6	1,9	2,2	2,6	3	3,5	4,1	4,8	5,6	6,6	7,7	9

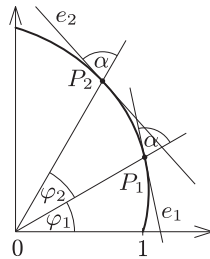
Ha végignézzük az eddigi rajzokat, feltűnik, hogy a 4. ábrán látható spirálfajta – formáját tekintve – közeli rokonságban állhat a logaritmikus spirállal. Izgalmas lehet fényt deríteni e rokoni szálakra, ezért érdemes számba venni a Descartes-féle spirál jellemző tulajdonságait.

1. A görbe derivált görbéje önmagához hasonló: $r'(\varphi) = ake^{k\varphi} = kr(\varphi)$. (Az sem lehetetlen, hogy ez az összefüggés ihlette Descartes-ot a spirál megalkotására.) **2.** Az azonos szögelfordulásokhoz tartozó $OP_1 = r_1$, $OP_2 = r_2$, ... vezérsugarak mértani sorozatot alkotnak. E sorozat hányadosa: $e^{k\Delta\varphi}$. Igazolásként tekintsük az $\frac{r_{n+1}}{r_n}$ hányadost:

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{ae^{k\varphi_{n+1}}}{ae^{k\varphi_n}} = e^{k\Delta\varphi},$$

ahol $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ számtani sorozatot képez, melynek differenciája $\Delta\varphi$.

3. A görbe bármely pontjába húzott vezérsugár és érintő hajlásszöge állandó. Ha ezt az állandó szöget α -val jelöljük, akkor $\tan \alpha = \frac{1}{k}$ (9. ábra).



9. ábra

A bizonyításhoz térjünk át derékszögű koordinátákra:

$$P(x; y) = P(r(\varphi) \cos \varphi; r(\varphi) \sin \varphi).$$

Az érintő meredeksége (ha van):

$$m_e = \frac{y'}{x'} = \frac{r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi}{r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi}.$$

Az 1. tulajdonság miatt

$$m_e = \frac{k \sin \varphi + \cos \varphi}{k \cos \varphi - \sin \varphi}.$$

Az OP vezérsugár meredeksége (ha van):

$$m_{OP} = \frac{y}{x} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

A két egyenes hajlásszögének (α) meghatározásához használjuk az ismert trigonometrikus összefüggést:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_{OP} - m_e}{1 + m_{OP} m_e} \right| = \left| \frac{\frac{\sin \varphi (k \cos \varphi - \sin \varphi) - \cos \varphi (k \sin \varphi + \cos \varphi)}{\cos \varphi (k \cos \varphi - \sin \varphi)}}{\frac{\cos \varphi (k \cos \varphi - \sin \varphi) + \sin \varphi (k \sin \varphi + \cos \varphi)}{\cos \varphi (k \cos \varphi - \sin \varphi)}} \right|.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket és a lehetséges egyszerűsítéseket:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{k(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} \right| = \frac{1}{k}.$$

Megjegyzések: 1. Nincs értelmezve az érintő meredeksége, ha $\sin \varphi = k \cos \varphi$. Ekkor $\alpha = 90^\circ - \varphi$, azaz $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \varphi$, és valóban

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{k}.$$

2. A vezérsugár meredeksége akkor nincs értelmezve, ha $\cos \varphi = 0$. Ekkor

$$m_e = \frac{k \sin \varphi}{-\sin \varphi} = -k, \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{-\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{k}.$$

3. A 8. ábrán látható spirál esetén

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{3}, \quad \text{tehát} \quad \alpha \approx 73^\circ.$$

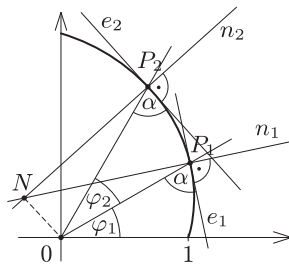
5. Fedezzük fel a rokonságot!

Térjünk vissza arra a kérdésre, hogy:

Vajon milyen rokonság köti össze a 4. ábra spiráljait a 8. ábrán látható logaritmikus spirállal?

A 3. tulajdonság következményeként belátható a következő állítás: **4.** Az $r = a \cdot e^{k\varphi}$ egyenlettel definiált görbe nem állhat körívdarabokból.

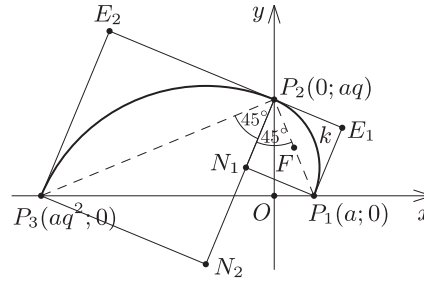
A bizonyításhoz használjuk a 10. ábra jelöléseit. Ha feltételezzük, hogy P_1 és P_2 azonos köríven van, akkor az e_1 , e_2 érintőkre állított n_1 , n_2 merőlegesek N metszéspontja lenne a kör középpontja. De a 3. tulajdonság miatt a P_1 és a P_2 az NO szakasz ($90^\circ - \alpha$) szögű látókörívének két pontja, mivel $\angle NP_1O = \angle NP_2O = 90^\circ - \alpha$. E látókör középpontja azonban az NO szakasz felezőmerőlegesén van, tehát nem lehet azonos az N ponttal. Az indirekt feltételezés ellentmondásra vezetett, tehát az állítás igaz.



10. ábra

Megjegyzendő még, hogy $\alpha \neq 90^\circ$, (hiszen akkor $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ lenne, vagyis $k = 0$ miatt a spirál elfajulna a sugarú körre), tehát az N és az O pont nem eshet egybe. **5.** Ezek után *felvetődik a közelíthetőség kérdése*. Megközelíthetők-e a spirál-darabok körívekkel? Ha igen, akkor hogyan? Elég jó-e a közelítés? Függ-e k -től? Ha igen, milyen módon?

A tengelyeken lévő P_1 , P_2 és P_3 spirálpontok (11. ábra) derékszögű háromszög csúcsai. Indoklás: OP_1 ; OP_2 és OP_3 mértani sorozatot alkotnak. ($q = e^{\frac{k\pi}{2}} > 1$). Így $aq = \sqrt{a^2 q^2}$, ami éppen a magasságtétel, tehát $P_1 P_2 P_3 \triangle$ derékszögű.



11. ábra

Az 5. megállapítás következménye, hogy: **6.** A P_1P_2 és P_2P_3 átlójú négyzetek N_1 és N_2 csúcsa a $P_1P_2P_3$ szögfelezőjére esik. Ez a tény biztosítja, hogy a 4. a, b, c. ábra négyzetei k -tól függetlenül ráilleszthetők a spirálra (11. ábra).

Összehasonlításunk legizgalmasabb állomásához érkeztünk.

Az N_1 középpontú, N_1P_1 sugarú k körhöz képest hol helyezkednek el a P_1P_2 spirálív pontjai? (A 11. ábrát nézve „szemléletünk” teljes egybeesést mutat.)

Tekintsük az $N_1P_1E_1P_2$ négyzetet:

$$F\left(\frac{a}{2}; \frac{aq}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{FP_2}\left(-\frac{a}{2}; \frac{aq}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{FN_1}\left(-\frac{aq}{2}; -\frac{a}{2}\right).$$

Ezek szerint a k kör középpontja:

$$N_1\left(\frac{a(1-q)}{2}; \frac{a(q-1)}{2}\right),$$

sugara:

$$\frac{a\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{2}}.$$

A kör egyenlete:

$$k: \left(x - \frac{a(1-q)}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a(q-1)}{2}\right)^2 = \frac{a^2(1+q^2)}{2}.$$

Átalakítás után:

$$x^2 + y^2 + a(q-1)(x-y) = a^2q.$$

Behelyettesítve a spirál-pontokat, amelyekre

$$x = a \cdot e^{k\varphi} \cos \varphi \quad \text{és} \quad y = a \cdot e^{k\varphi} \sin \varphi,$$

azt kapjuk, hogy

$$a^2e^{2k\varphi} + a^2e^{k\varphi}(q-1)(\cos \varphi - \sin \varphi) = a^2q.$$

Elosztva az egyenletet a^2 -tel, majd átrendezve:

$$(1) \quad (q-1)(\sin \varphi - \cos \varphi) = \frac{e^{2k\varphi} - q}{e^{k\varphi}} \quad \left(\text{ahol } q = e^{\frac{k\pi}{2}}\right).$$

Ha belátnánk, hogy (1) bal és jobb oldalán álló kifejezés „majdnem” ugyanazokat az értékeket veszi fel a $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ esetben, akkor az azt jelentené, hogy a két vizsgált spirál „közelítően” megegyezik egymással.

Mivel $\sin \varphi - \cos \varphi = \sqrt{2} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, azért célszerű bevezetni az $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{4}$ helyettesítést. Ekkor az (1) bal oldalán álló függvény:

$$f(\alpha) = \sqrt{2}\left(e^{\frac{k\pi}{2}} - 1\right) \sin \alpha$$

az (1) jobb oldalán álló függvény:

$$g(\alpha) = 2 \frac{e^{k\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} - e^{k\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}}{2} = 2e^{\frac{k\pi}{4}} \sinh(k\alpha) \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}\right).$$

Sőt, az egyes k -értékekhez tartozó konstans szorzókat csoportosítva, legyen

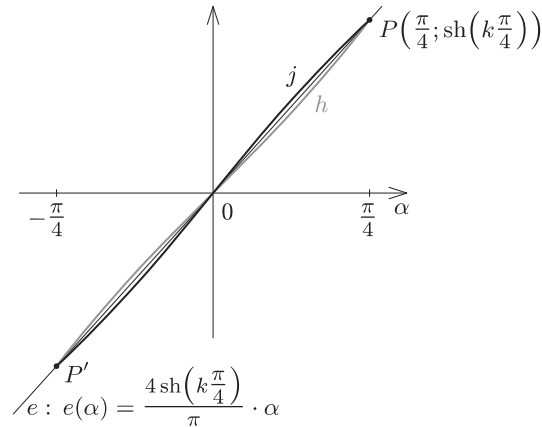
$$h(\alpha) = \sinh(k\alpha) \quad \text{és} \quad j(\alpha) = \sqrt{2} \frac{e^{\frac{k\pi}{2}} - 1}{2e^{\frac{k\pi}{4}}} \sin \alpha = \sqrt{2} \sinh\left(k\frac{\pi}{4}\right) \sin \alpha.$$

A $h(\alpha)$ és $j(\alpha)$ függvények közös tulajdonságai: mindkettő páratlan függvény és

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = j\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = j\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad \text{valamint} \quad h(0) = j(0).$$

A két függvény ellentétes konvexitású, hiszen $\sinh'(\alpha) = \cosh(\alpha)$ és $\sin'(\alpha) = \cos(\alpha)$, és e két függvény monotonitása a vizsgált intervallumokban ellentétes. Így a $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ -ban $h(\alpha)$ alulról konkáv, míg $j(\alpha)$ alulról konvex, a $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ -ben pedig éppen fordítva.

Most már felvázolható a két függvény képe.



12. ábra

Végül becsüljük meg j és h eltérését e -től:

$$\frac{j(\alpha)}{e(\alpha)} = \frac{\sqrt{2} \sinh\left(\frac{k\pi}{4}\right) \sin \alpha}{\frac{4\alpha}{\pi} \sinh\left(k\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \approx \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1,$$

mivel ismeretes, hogy $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

$$\frac{e(\alpha)}{h(\alpha)} = \frac{\sinh\left(\frac{k\pi}{4}\right) \alpha}{\frac{\pi}{4} \sinh(k\alpha)} = \frac{\sinh\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{\frac{k\pi}{4}} \frac{k\alpha}{\sinh(k\alpha)} \approx 1,$$

mivel $x \rightarrow 0$ esetén $\lim_x \frac{\sinh(x)}{x} = 1$.

Ezzel beláttuk, hogy az $r(\varphi) = a \cdot e^{k\varphi}$ módon definiált logaritmikus spirál közelíthető negyed körívvel, a és k értékétől függetlenül.

7. Konklúzió

Manapság, a könyvesboltok polcain látványos, vonzó kiadványok keresnek rejtett, még fel nem fedezettnek vélt összefüggéseket titokzatos világunkban.

Lapozzuk fel egyiket-másikat, és a misztikus következtetések alapjait képező információ-sűrítményt fogadjuk értő háttértudással.

Idézet Stephen Skinner: *Szakkralis geometria* című könyvének 48. oldaláról: „A logaritmikus vagy szögazonos spirál keletkezésének kulcsszáma a phi (az aranymetszési állandó). A logaritmikus spirál olyan örvénylő négyszögekből áll, amelyek – a középponttól kifelé haladva – a phi által irányított harmonikus rendben növekednek ... kezdőpontja van, vége azonban nincs ...”

De mi

– tudjuk, hogy a $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ aranymetszési állandó bármely más $q > 1$ valós számmal helyettesíthető;

– tudjuk, hogy nem lehet kezdőpontja, mert az $e^{k\varphi}$ értéke egyetlen φ esetén sem 0.

Hasonló mondatokat találunk a Vince Kiadó által 2009-ben megjelentetett *A titkos kód* című könyvben (127. oldal):

– „... Ebben a spirálban benne foglaltatik a Φ harmóniájának és egyensúlyának gyönyörűsége titka.”

A mellékelt szerkesztési utasítás lényegében megegyezik a cikk 4. ábrájának rajzaival.

De mi

- tudjuk, hogy az így kapott görbe valóban csodás matematikai közelítés, de *nem* maga a logaritmikus spirál;
- tudjuk, hogy miért kapta a „logaritmikus” jelzőt;

és

- tudjuk, hogy *a logaritmikus spirál szépségei, önmagát sokszorozó végtelensége a Φ különleges aránytól függetlenül is élénk táru.*

Halász Ágnes

Eötvös József Gimnázium (Budapest)