

# Megoldásvázlatok a 2011/1. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Gerőcs László

Budapest

## I. rész

1. Egy vásáros vattacukrot és főtt kukoricát árult a piacon. Egy vattacukron 40%, egy főtt kukoricán pedig 25% a haszna. Egy napon kétszer annyi vattacukrot adott el, mint főtt kukoricát, és így 36%-os lett a haszna. Másnap viszont kétszer annyi főtt kukoricát adott el, mint vattacukrot. Hány százalék haszna lett ezen a napon? (11 pont)

**Megoldás.** Legyen  $c$  egy vattacukor,  $k$  egy kukorica beszerzési és előállítási költsége. Ha az első napon  $x$  db kukoricát adott el az árus, akkor a feltételek szerint:

$$1,4 \cdot 2cx + 1,25 \cdot kx = (kx + 2cx) \cdot 1,36.$$

Innen egyszerűsítés és rendezés után kapjuk:

$$c = \frac{11}{8}k.$$

Ha másnap  $y$  db vattacukrot adott el, és e napon a beszerzési és előállítási költség  $z$ -szerese lett a bevétele, akkor:

$$1,4 \cdot cy + 1,25 \cdot 2ky = (cy + 2ky) \cdot z.$$

Ismét egyszerűsítés és összevonás után, felhasználva az előbb  $c$  és  $k$  között kapott összefüggést:

$$z = \frac{1,4cy + 2,5ky}{cy + 2ky} = \frac{1,4 \cdot \frac{11}{8}k + 2,5k}{\frac{11}{8}k + 2k} = \frac{1,4 \cdot 11 + 2,5 \cdot 8}{11 + 2 \cdot 8} \approx 1,31.$$

Tehát a vásáros haszna másnap kb. 31% lett.

2. A BKV megfigyelései alapján az utasoknak kb. 8%-a bliccel, azaz érvényes jegy vagy bérlet nélkül utazik a járatokon.

- a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy buszon, amelyen 24-en utaznak, a jegyellenőr nem talál bliccelőt?
  - b) Hány utas esetén lesz legalább 90% annak az esélye, hogy az ellenőr talál bliccelőt a járaton?
  - c) Egy buszon 24 utas tartózkodott. Mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan két bliccelőt talál az ellenőr?
- (12 pont)

**Megoldás.** a) Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott utas bliccel 0,08, így annak a valószínűsége, hogy az utasnak van érvényes menetjegye vagy bérlete 0,92%. Ezek szerint annak a valószínűsége, hogy a 24 utas mindegyikének van érvényes menetjegye vagy bérlete

$$0,92^{24} \approx 0,135.$$

(Ez meglehetősen kicsi valószínűség, így 24 utas közül már elég nagy eséllyel (86,5%) talál bliccelőt az ellenőr.)

b) Ha annak az esélye, hogy talál bliccelőt az ellenőr legalább 90%, akkor annak az esélye, hogy nem talál bliccelőt kisebb, mint 10%, azaz annak a valószínűsége, hogy nem talál bliccelőt kisebb, mint 0,1.

Mivel annak a valószínűsége, hogy  $n$  utas között nincs bliccelő  $0,92^n$ , így a  $0,92^n < 0,1$  egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\lg 0,92^n < \lg 0,1, \quad \text{azaz} \quad n \cdot \lg 0,92 < \lg 0,1.$$

Most elosztjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát  $\lg 0,92$ -dal, de vigyázunk, mert  $\lg 0,92$  negatív szám, így az egyenlőtlenség iránya megfordul:

$$n > \frac{\lg 0,1}{\lg 0,92} \approx \frac{-1}{-0,0362} \approx 27,6.$$

Tehát 28 utas esetén már legalább 90%-os annak az esélye, hogy találunk bliccelőt a járaton.

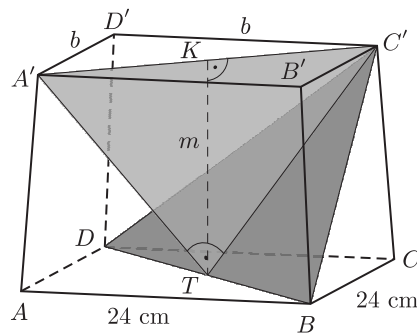
c) Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen ellenőrzött utas bliccel 0,08, annak a valószínűsége, hogy nem bliccel, 0,92. A 24 utas közül a két bliccelőt  $\binom{24}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki. Így – a binomiális eloszlás szerint – annak a valószínűsége, hogy a 24 utas között pontosan két bliccelő van:

$$\binom{24}{2} \cdot 0,08^2 \cdot 0,92^{22} \approx 0,282.$$

Tehát kb. 28,2% az esélye annak, hogy 24 utas között pontosan két bliccelőt találunk.

3. Az  $ABCD A'B'C'D'$  négyzet alapú egyenes csomakagúla egyik határoló négyzetének oldala 24 cm (lásd az ábrát).

Tudjuk, hogy a  $BC'D$  háromszög szabályos, az  $A'TC'$  háromszög pedig derékszögű, ahol  $T$  a 24 cm oldalú négyzet átlóinak a metszéspontja. Mekkora a gúla térfogata? (14 pont)



**Megoldás.** A csonkagúla másik határoló négyzetének oldalát, valamint a testmagasságot kell kiszámítanunk (ábránkon ezeket  $b$ -vel, illetve  $m$ -mel jelöltük).

A  $BDC'$  szabályos háromszög oldalai az  $ABCD$  négyzet átlójával egyenlők:  $BD = DC' = BC' = 24\sqrt{2}$ . E háromszög  $C'T$  magassága:

$$C'T = \frac{24\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{6}.$$

$C'T$  az  $A'TC'$  egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóival is egyenlő. Ezek szerint az  $A'TC'$  háromszög  $A'C'$  átfogója:

$$A'C' = 12\sqrt{6}\sqrt{2} = 12\sqrt{12} = 24\sqrt{3}.$$

Ebből pedig az  $A'B'C'D'$  négyzet  $b$  oldala:

$$b = \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{6}.$$

A csonkagúla  $m$  magassága az  $A'TC'$  egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága, tehát:

$$m = KT = \frac{A'C'}{2} = 12\sqrt{3}.$$

Most már minden megvan ahhoz, hogy meghatározzuk a csonkagúla  $V$  térfogatát:

$$V = \frac{12\sqrt{3}}{3} \cdot (24^2 + 24 \cdot 12\sqrt{6} + (12\sqrt{6})^2) = 4\sqrt{3} \cdot (576 + 288\sqrt{6} + 864) \approx 14\,864,1.$$

Vagyis a térfogat kb.  $14\,864,1 \text{ cm}^3$ .

*Megjegyzés.* A feladat szövegében az egyik határoló négyzet oldalhossza volt adott. Érdekes észrevenni, hogy a csonkagúla „fedőnégyzetének”  $b$  oldala ennél nagyobb lett.

**4.** Pisti külföldi útja során meglátott egy kirakatban egy igen kedvező árú laptopot, melynek ára euróban háromjegyű pozitív egész szám volt. Bement, hogy megvásárolja, de döbbenet tapasztalta, hogy a pénztárnál 1 euróval kevesebbet számláztak, mint a kirakatban látott ár kétszerese. Mikor reklamált, kiderült, hogy a kirakatban az árcédulán a számjegyeket véletlenül fordított sorrendben írták ki. Mennyibe került a laptop? (14 pont)

**Megoldás.** Ha a kirakatban látott ár  $\overline{cba}$ , azaz a valódi ár  $\overline{abc}$ . A pénztárnál  $2 \cdot \overline{cba} - 1$  eurót kértek Pistitől. A feltételek szerint:

$$\overline{abc} + 1 = 2 \cdot \overline{cba}.$$

Az egyenlet jobb oldala páros, így a bal oldalnak is párosnak, tehát  $c$ -nek páratlannak kell lennie. De  $c < 5$  kell, hogy legyen, ugyanis ellenkező esetben az egyenlet jobb oldalán már négyjegyű szám szerepelne, de a bal oldal csak háromjegyű (az  $\overline{abc} = 999$  eset nyilván kizárható). Ezek szerint  $c = 1$  vagy  $c = 3$ .

Ha  $c = 1$ , akkor az egyenlet bal oldala 2-re végződik. Ekkor a jobb oldalon  $a = 1$  vagy  $a = 6$  lehet. De  $a = 1$  esetén a bal oldal 200-nál kisebb, míg a jobb oldal 200-nál nagyobb lenne, tehát  $a = 1$  nem lehetséges. Ha  $a = 6$ , akkor a bal oldal 600-nál nagyobb, míg a jobb pedig 400-nál kisebb lenne, így ez is lehetetlen.

Ha  $c = 3$ , akkor a bal oldali szám 4-re végződik, így a jobb oldalon  $a = 2$ , vagy  $a = 7$ . Ha  $a = 2$ , akkor a bal oldal 300-nál kisebb, míg a jobb oldal 600-nál nagyobb lenne, ami lehetetlen. Végül, ha  $a = 7$ , akkor az egyenlet így alakul:

$$\overline{7b3} + 1 = 2 \cdot \overline{3b7}, \quad \text{azaz} \quad 704 + 10b = 614 + 20b, \quad \text{ahonnan} \quad b = 9.$$

Tehát Pisti a kirakatban a 397-et látta, a valóságos ár pedig 793 euró.

## II. rész

5. a) A valós számok halmazán értelmezett  $f(x) = ax^2 + bx + c$  függvényről tudjuk, hogy egyetlen zérushelye az  $x = 1$ -ben van és  $f(2) = 2$ . Határozzuk meg az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  együtthatókat.

b) Legyenek a valós számok halmazán értelmezett függvények  $g(x) = x^2 - 3x + 2$  és  $h(x) = 2x - a$ . Határozzuk meg az  $a$  valós paraméter értékét úgy, hogy a  $g(h(x)) = h(g(x))$  egyenletnek ne legyen valós megoldása. (16 pont)

**Megoldás.** a) A feltételek alapján az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left. \begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0, \\ a + b + c &= 0, \\ 4a + 2b + c &= 2. \end{aligned} \right\}.$$

A második egyenletből:  $c = -a - b$ . Ezt az első és a harmadik egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} b^2 + 4a^2 + 4ab &= 0, \\ 3a + b &= 2. \end{aligned} \right\}.$$

A második egyenletből:  $b = 2 - 3a$ . Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$(2 - 3a)^2 + 4a^2 + 4a(2 - 3a) = 0, \quad \text{ahonnan} \quad a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 = 0,$$

tehát  $a = 2$ . Ezt visszahelyettesítve:  $b = -4$ ,  $c = 2$ . A keresett együtthatók:  $a = 2$ ,  $b = -4$ ,  $c = 2$ .

b) Ha  $g(x) = x^2 - 3x + 2$  és  $h(x) = 2x - a$ , akkor

$$g(h(x)) = (2x - a)^2 - 3(2x - a) + 2 \quad \text{és} \quad h(g(x)) = 2(x^2 - 3x + 2) - a.$$

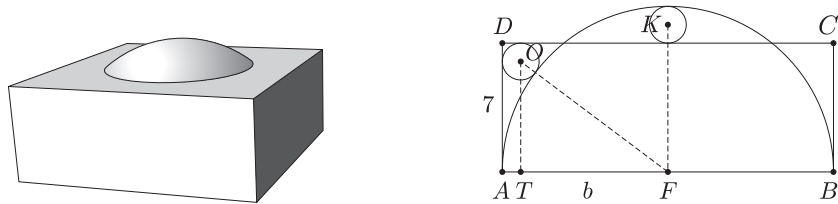
Tehát  $4x^2 - 4ax + a^2 - 6x + 3a + 2 = 2x^2 - 6x + 4 - a$ , azaz  $2x^2 - 4ax + a^2 + 4a - 2 = 0$ . Ennek az egyenletnek akkor és csak akkor nincs valós gyöke, ha diszkriminánsa negatív:

$$16a^2 - 8(a^2 + 4a - 2) < 0, \quad \text{ahonnan} \quad a^2 - 4a + 2 < 0.$$

A másodfokú kifejezés zérushelyei:  $a_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ , így az egyenlőtlenség megoldása:  $2 - \sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2}$ . Ezek lesznek a feladatban keresett  $a$  valós paraméterek.

6. Egy arab épületet és annak egy tengelymetszetét látjuk az ábrán.

A tengelymetszet  $ABCD$  téglalapjának  $AD$  oldala 7 m,  $AB$  oldala pedig nagyobb, mint 14 m. Egy kis kör érinti az  $AD$  és  $DC$  oldalakat, valamint kívülről érinti az  $AB$  oldalra emelt félkört. Egy másik kis kör a  $DC$  oldalt és a félkört belülről érintő körök legnagyobbika. Mekkora e kis körök sugara, ha tudjuk, hogy e sugarak egyenlők? (16 pont)



**Megoldás.** Legyen  $b$  a téglalap hosszabbik oldala, és legyenek  $K$  és  $O$  a keresett  $x$  sugarú körök középpontjai. Az ábra alapján:

$$KF = 7 + x = \frac{b}{2} - x.$$

Az  $OTF$  derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$\left(\frac{b}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + (7 - x)^2.$$

Az előző egyenletet is felhasználva azt kapjuk, hogy

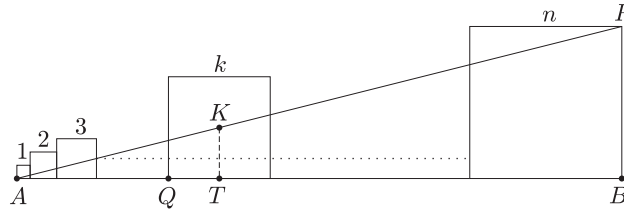
$$(7 + 3x)^2 = (7 + x)^2 + (7 - x)^2, \quad \text{ahonnan} \quad 7x^2 + 42x - 49 = 0.$$

Az egyenlet egyetlen pozitív gyöke  $x = 1$ , tehát a kis körök sugara 1 m.

7. Egy más mellé rajzoltunk  $n$  db négyzetet. Az egyes négyzetek oldalai sorban  $1, 2, 3, \dots, n$  (lásd az ábrát).

Van-e olyan négyzet, melynek területét az  $AP$  szakasz felezi?

(16 pont)



**Megoldás.** Ha egy egyenes felezi egy négyzet területét, akkor át kell haladnia a négyzet középpontján. Ha az  $AP$  egyenes a  $k$ -adik négyzet területét felezi, akkor a  $KTA$  és  $PBA$  nyilvánvalóan hasonló háromszögekre:

$$\frac{AT}{TK} = \frac{AB}{BP}.$$

Az egyenlőségben szereplő egyes szakaszok:

$$AT = 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + \frac{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k}{2} = \frac{k^2}{2},$$

$$TK = \frac{k}{2},$$

$$AB = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$BP = n.$$

Ezek szerint:

$$\frac{\frac{k^2}{2}}{\frac{k}{2}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}, \quad \text{azaz} \quad k = \frac{n+1}{2}.$$

Ez akkor lesz egész szám, ha  $n$  páratlan. Tehát csak akkor lesz olyan négyzet, melynek a területét az  $AP$  szakasz felezi, ha a négyzetek száma páratlan, és ekkor a  $k = \frac{n+1}{2}$ -edik négyzet területét felezi a kérdéses egyenes.

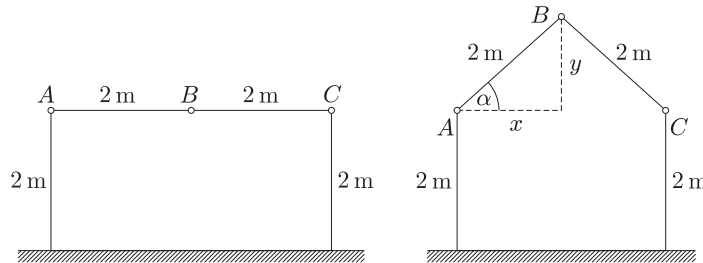
**8. Egy összecusukható sátor vázát látjuk az ábrán.**

A két 2 m magas függőleges rúd között az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokban található csuklók mentén állítható a sátor keresztmetszetének váza oly módon, hogy a két függőleges rudat közelítjük egymáshoz. A rudak 2 m hosszúak. A sátor használói tapasztalatból tudják, hogy a két függőleges rudat egymáshoz közelítve, a sátor légtere egy darabig növekszik, aztán újra csökken.

a) Számítsuk ki  $\alpha = 20^\circ$  esetén a sátor keresztmetszetének területét.

b) Mekkora  $\alpha$  szög esetén lesz a sátor légtere maximális?

(16 pont)



**Megoldás.** a) A ferde tetőknek a vízszintessel bezárt szöge legyen  $\alpha$ .

A keresztmetszet területe ekkor egy téglalap és egy egyenlő szárú háromszög területének összegével egyenlő. A téglalap egyik oldala 2, a másik oldala  $2x$ , ahol  $x = 2 \cos \alpha$ . Tehát a téglalap területe:

$$T_{\text{téglalap}} = 2 \cdot 2x = 4 \cdot 2 \cos \alpha = 8 \cos \alpha.$$

Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög alapja és  $y$  magassága:

$$AC = 2x = 4 \cos \alpha, \quad y = 2 \sin \alpha.$$

Így az  $ABC$  háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{2xy}{2} = xy = 2 \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha = 4 \cos \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Ezek szerint a keresztmetszet területe  $\alpha$  függvényében:

$$T(\alpha) = 8 \cos \alpha + 4 \cos \alpha \sin \alpha, \quad \text{ahol} \quad 0 \leq \alpha \leq 90^\circ.$$

Vagyis  $T(20^\circ) \approx 8,803 \text{ m}^2$ .

b) A tapasztalatok alapján tudjuk, hogy a keresztmetszet területének egy bizonyos  $\alpha$ -nál maximuma van, vagyis tudjuk, hogy valamely  $\alpha$  esetén a  $T(\alpha)$  függvény deriváltja 0-val egyenlő. Ezt az  $\alpha$  értéket kell meghatároznunk.

$$\begin{aligned} T'(\alpha) &= 8(-\sin \alpha) + 4(\cos \alpha \sin \alpha)' = 8(-\sin \alpha) + 4(-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= -8 \sin \alpha + 4(-\sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha) = -8 \sin^2 \alpha - 8 \sin \alpha + 4 = 0, \end{aligned}$$

azaz:

$$2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 1 = 0.$$

A  $\sin \alpha$ -ra kapott másodfokú egyenlet megoldása:

$$(\sin \alpha)_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

A negatív gyök nyilván nem jöhet számításba, hiszen  $\alpha$  hegyesszög, így:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0,366, \quad \text{ahonnan} \quad \alpha \approx 21,47^\circ.$$

Vagyis kb.  $21,47^\circ$  esetén lesz a sátor légtere a lehető legnagyobb.

**9.** Legyenek  $a$  és  $b$  1-nél nagyobb valós számok. Egy téglatest élei  $\log_a b$ ,  $\log_b a$  és  $\log_a ab$ . Bizonyítsuk be, hogy a téglatest felszínének mérőszáma a térfogat mérőszámának több mint 4-szerese. (16 pont)

**Megoldás.** A téglatest térfogata:  $V = \log_a b \cdot \log_b a \cdot \log_a ab$ . Mivel  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ , így  $V = \log_a ab = 1 + \log_a b$ . A téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot [\log_a b \cdot \log_b a + \log_a b \cdot \log_a ab + \log_b a \cdot \log_a ab].$$

Ez tovább alakítva:

$$A = 2 \cdot [1 + \log_a ab(\log_a b + \log_b a)] = 2 \cdot [1 + V \cdot (\log_a b + \log_b a)].$$

Osszuk el a kapott egyenlet mindkét oldalát  $V$ -vel:

$$\frac{A}{V} = 2 \cdot \left[ \frac{1}{V} + \log_a b + \log_b a \right].$$

A zárójelen belül a második és a harmadik tag egy pozitív számnak és reciprokanak összege. Erről ismert, hogy értéke legalább 2. Ehhez a pozitív  $\frac{1}{V}$ -t hozzáadva nyilván:

$$\frac{1}{V} + \log_a b + \log_b a > 2, \quad \text{így} \quad \frac{A}{V} > 4, \quad \text{azaz} \quad A > 4V.$$

Tehát a felszín mérőszáma valóban nagyobb a térfogat mérőszámának négyszeresénél.