

Emelt szintű gyakorló feladatsor

Számadó László

Budapest

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

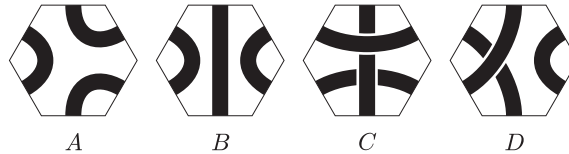
$$(x - \sqrt{x-5} - 5)(x^2 - 11x + 28) = 0.$$

(11 pont)

2. Veronika egy olyan programot írt a számítógépre, amely egy pozitív egész számot kér bemenő adatként, majd egy billentyű megnyomására a soron következő egész számmal megnövelt összeg lesz látható a képernyőn. A billentyű újabb megnyomásával mindig az utolsónak kapott összeget növeli a gép, 1-gyel nagyobb számmal, mint az ezt megelőző lépésben, és az így kapott összeg megjelenik a képernyőn. Egyik alkalommal az 59. billentyűnyomás után a 2010 jelent meg a képernyőn. Melyik szám volt ekkor a bemenő adat? (12 pont)

3. A 2 500 000 Ft-os összeg egyik része egy év alatt 60 000 Ft-ot, a másik része 75 000 Ft-ot kamatozott. Ez utóbbi kamatlába 1%-kal kisebb volt, mint az első. Hány százalékos kamatra és mekkora összegeket kötöttünk le? (14 pont)

4. Egy játék szabályos hatszög alakú lapkákból áll, melyeknek egyik oldalán három különböző színű vonal látható. Egy készlethez négy színt használnak. A vonalak elrendezése alapján négyféle lapka lehetséges, ezeket az *ábra* mutatja (a címlapon is).



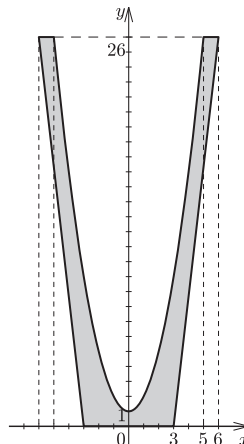
Hány elemű egy készlet, ha az összes lehetséges lapkából egyet tartalmaz?

(14 pont)

II. rész

5. Egy háromszög két oldalának hossza egész szám. Ha közülük a rövidebbet növeljük 2-vel, a hosszabbat csökkentjük 2-vel, az általuk közrezárt szöget pedig változatlanul hagyjuk, akkor a háromszög területe az eredeti terület másfélszerese lesz. Milyen hosszú volt az eredeti háromszög két oldala? (16 pont)

6. Egy üvegváza tengelymetszetét *koordinátarendszerben* ábrázoltuk, melynek egységeit vegyük 1 cm-nek. A forgástest belső felületét az $f(x) = x^2 + 1$, a külső felületét a $g(x) = \frac{26}{3}x - 26$ hozzárendelésű függvény y tengely körüli megforgatásával kapjuk. A test magassága 26 cm.



a) Hány liter víz önthető a vázába anélkül, hogy kicsordulna?

b) Mekkora a váza tömege, ha az üveg sűrűsége $2,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$? (16 pont)

7. Igazoljuk, hogy a $8x^3 - 6x + 1 = 0$ harmadfokú egyenletnek három különböző gyöke van, és ezek egyike a $\sin \frac{\pi}{18}$.
(16 pont)

8. Adott három kör az egyenletével: $x^2 + 10x + y^2 - 6y + 30 = 0$, $x^2 + 4x + y^2 + 2y + 4 = 0$, $x^2 - 14x + y^2 + 4y + 44 = 0$.

a) Mekkora a középpontjaik által meghatározott háromszög kerülete?

b) Igazoljuk, hogy ennek a háromszögnek a területe racionális szám.

c) Adjuk meg annak a pontnak a koordinátáit, amelytől mindhárom középpont egyenlő távolságra van. (16 pont)

9. Egy felülről nyitott négyzet alapú, 4 dm^2 felszínű dobozt szeretnénk készíteni, amelynek a lehető legnagyobb a térfogata. Adjuk meg a doboz maximális térfogatának pontos értékét. Mekkora a doboz éleinek hossza milliméter pontossággal? (16 pont)