

Megoldásvázlatok a 2010/8. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Gyanó Éva
Budapest

I. rész

1. a) Állítsuk növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$A = \left(2011^{\sin \frac{81\pi}{4}}\right)^{\log_2 \log_3 \log_5 125};$$

$$B = \left(\sin \frac{81\pi}{4} + \cos \frac{81\pi}{4}\right)^2;$$

$$C = \log_{13-\sqrt{168}}(13 + \sqrt{168}).$$

b) Igazoljuk, hogy az alábbi kifejezés értéke egész szám:

$$\sqrt[3]{2 - 27 \cdot \sqrt[3]{25} + 9 \cdot \sqrt[3]{25^2} + \sqrt[3]{25}}.$$

(12 pont)

Megoldás. a)

$$\begin{aligned} A &= \left(2011^{\sin \frac{81\pi}{4}}\right)^{\log_2 \log_3 \log_5 125} = \left(2011^{\sin \frac{\pi}{4}}\right)^{\log_2 \log_3 \log_5 5^3} = \left(2011^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{\log_2 \log_3 3} = \\ &= 2011^{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \log_2 1} = 2011^0 = 1. \end{aligned}$$

$$B = \left(\sin \frac{81\pi}{4} + \cos \frac{81\pi}{4}\right)^2 = \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2.$$

$$\begin{aligned} C &= \log_{13-\sqrt{168}}(13 + \sqrt{168}) = \log_{13-\sqrt{168}}\left(\frac{1}{13 - \sqrt{168}}\right) = \\ &= \log_{13-\sqrt{168}}(13 - \sqrt{168})^{-1} = -1. \end{aligned}$$

Vagyis: $C < A < B$.

b) A köbgyök alatti kifejezés első tagját kettébontva adódik:

$$\sqrt[3]{27 - 27 \cdot \sqrt[3]{25} + 9 \cdot \sqrt[3]{25^2} - 25 + \sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{(3 - \sqrt[3]{25})^3} + \sqrt[3]{25} = 3 - \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{25} = 3.$$

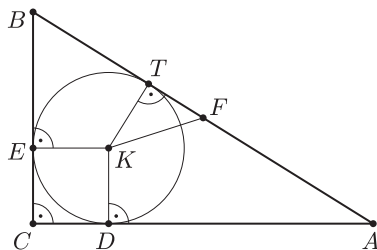
2. Egy hajó a folyón egyenletes sebességgel a vízfolyás irányában haladva egy bizonyos utat 5 óra alatt, ugyanezt az utat a vízfolyással szemben haladva 5 óra 24 perc alatt teszi meg. Mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat egy tutaj, amely a víz sebességével halad?
(12 pont)

Megoldás. Legyen a hajó óránkénti sebessége állóvízben v , a víz sebessége v_1 . Ekkor a hajó sebessége a vízfolyás irányában $v + v_1$, a vízfolyással szemben $v - v_1$. Ekkor a megtett út: $5(v + v_1) = 5,4(v - v_1)$, ebből $v = 26v_1$. Azaz: $5(26v_1 + v_1) = 135v_1$.

A kérdésben szereplő utat a tutaj v_1 sebességgel haladva 135 óra alatt teszi meg.

3. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 28 és 45. Mennyi a beírható és a köré írható körök középpontjainak távolsága?
(13 pont)

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit. A két befogó ismeretében a Pitagorasz-tétel segítségével meghatározzuk az átfogó hosszát: $c^2 = 28^2 + 45^2 = 2809$, azaz $c = 53$. Mivel a derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó F felezőpontja, így a kör sugara: $R = 26,5$. A beírható kör sugara a külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőségével meghatározható.



Tudjuk, hogy: $BT = BE = a - r$, $AT = AD = b - r$. Ezek alapján: $c = AB = BT + AT = a - r + b - r$, azaz:

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{28 + 45 - 53}{2} = 10.$$

Mivel $KT = r$ és $BT = BE = a - r = 28 - 10 = 18$, így $TF = BF - BT = 26,5 - 18 = 8,5$. Alkalmazva a Pitagorasz-tételt a KTF derékszögű háromszögre: $KF^2 = 10^2 + 8,5^2 = 172,25$, azaz $KF \approx 13,12$.

A keresett távolság kb. 13,12.

4. Az $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$; $a \neq b$; $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$) függvényről tudjuk, hogy az $(a + b)$ helyen felvett helyettesítési értéke $(a - 4b)$, az $(a - b)$ helyen pedig $(a - 7b)$.

Adjuk meg az $f(x)$ hozzárendelési szabályát.

(14 pont)

Megoldás. $f(a + b) = a - 4b$, azaz

$$a - 4b = (a + b)^2 + a(a + b) + b,$$

$$a - 4b = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + ab + b.$$

$$f(a - b) = a - 7b, \text{ azaz } a - 7b = (a - b)^2 + a(a - b) + b.$$

$$a - 7b = a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - ab + b.$$

A (2)-ből elvesszük (3)-at: $3b = 6ab$. Mivel $b \neq 0$, azért $a = \frac{1}{2}$.

Ezt visszahelyettesítve az (1)-be, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} - 4b = \left(\frac{1}{2} + b\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + b\right) + b,$$

amiből a $0 = b \left(b + \frac{13}{2}\right)$ egyenlet adódik. Mivel $b \neq 0$, azért $b = -\frac{13}{2}$.

A keresett függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{13}{2}.$$

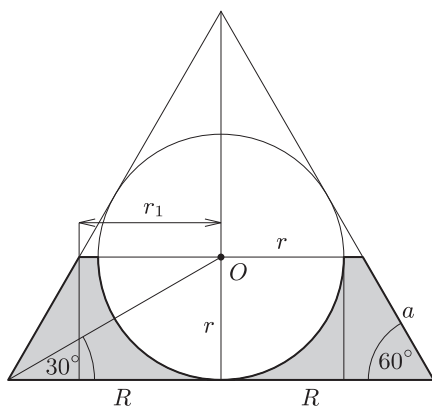
II. rész

5. Egy r sugarú gömb köré egyenlő oldalú kúpot írunk, a gömb középpontján át a kúp alapjával párhuzamos síkot fektetünk. (Az egyenlő oldalú kúp átmérőjének hossza egyenlő az alkotó hosszával.) Vegyük ki a keletkezett csonkakúpból a benne elhelyezkedő félgömböt.

Számítsuk ki az így visszamaradó test felszínét és térfogatát.

(16 pont)

Megoldás. A kérdéses test felszíne az ábrán látható részekből áll.



Az alapkör területe:

$$t_1 = R^2\pi.$$

A csónkakúp palást felszíne:

$$t_2 = (R + r_1)a\pi.$$

A körgyűrű területe:

$$t_3 = (r_1^2 - r^2)\pi.$$

A félgömb felszíne:

$$t_4 = 2r^2\pi.$$

A területeket az ismert r sugárral kell megadni, ezért R , a és r_1 értékét kifejezzük r segítségével:

$$R = r \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = r\sqrt{3},$$

$$a = \frac{r}{\sin 60^\circ} = r \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3},$$

$$r_1 = R - a \cos 60^\circ = r\sqrt{3} - \frac{2r\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = r\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Ezek alapján: $t_1 = 3r^2\pi$; $t_2 = \frac{10r^2\pi}{3}$; $t_3 = \frac{r^2\pi}{3}$; $t_4 = 2r^2\pi$. Így a felszín:

$$A = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{26r^2\pi}{3}.$$

A térfogat a csónkakúp térfogatának és a belőle kivett félgömb térfogatának különbségével egyenlő:

$$V = \frac{r\pi}{3}(R^2 + Rr_1 + r_1^2) - \frac{2r^3\pi}{3}.$$

Az R és r_1 értékét r -rel kifejezve: $V = \frac{13r^3\pi}{9}$.

6. Milyen α értékek mellett lesz az alábbi három kifejezés (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő eleme: $\lg \sin 2\alpha$; $\lg \sin 4\alpha$; $\lg \cos 2\alpha$? (16 pont)

Megoldás. A logaritmusok miatt teljesülni kell a következő kikötéseknek:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha > 0, \quad \text{ekkor: } 2k_1\pi < 2\alpha < \pi + 2k_1\pi, \quad & \text{vagyis: } k_1\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z}; \\ \sin 4\alpha > 0, \quad \text{ekkor: } 2k_2\pi < 4\alpha < \pi + 2k_2\pi, \quad & \text{vagyis: } k_2 \cdot \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{4} + k_2 \cdot \frac{\pi}{2}, \\ & k_2 \in \mathbb{Z}; \\ \cos 2\alpha > 0, \quad \text{ekkor: } -\frac{\pi}{2} + 2k_3\pi < 2\alpha < \frac{\pi}{2} + 2k_3\pi, \quad & \text{vagyis: } -\frac{\pi}{4} + k_3\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + k_3\pi, \\ & k_3 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A három eset együtt: $k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A számtani sorozat miatt: $\lg \sin 4\alpha - \lg \sin 2\alpha = \lg \cos 2\alpha - \lg \sin 4\alpha$. Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\lg \frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \lg \frac{\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha}, \quad \text{vagyis: } \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket és a megfelelő műveleteket:

$$2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad \sin 4\alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{I. } 4\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k_4\pi, \text{ ahonnan } \alpha_1 = \frac{\pi}{24} + k_4 \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k_4 \in \mathbb{Z};$$

$$\text{II. } 4\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k_5\pi, \text{ ahonnan } \alpha_2 = \frac{5\pi}{24} + k_5 \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k_5 \in \mathbb{Z}.$$

A megoldás (figyelembe véve a kikötéseket is):

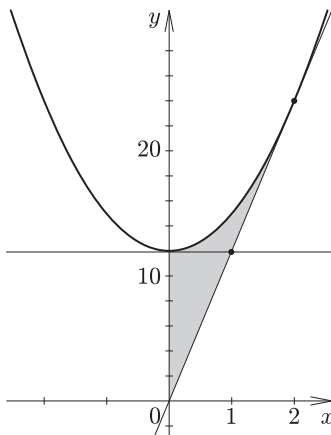
$$\alpha_1 = \frac{\pi}{24} + k' \cdot \pi, \quad k' \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{24} + k'' \cdot \pi, \quad k'' \in \mathbb{Z}.$$

7. Az $f(x) = 3x^2 + b$ függvény grafikonjának az $x = 2$ helyhez tartozó érintője áthalad az origón.

a) Hol metszi ez az érintő a parabola vezéregyenesét?

b) Számítsuk ki a függvénygörbe, az érintő, és az y tengely által közbezárt terület nagyságát. (16 pont)

Megoldás. a) Az érintő áthalad a $P(2; f(2))$ ponton. Mivel $f(2) = 3 \cdot 4 + b$, így $P(2; b + 12)$. Tudjuk, hogy $f'(x) = 6x$, ezért az érintő meredeksége: $f'(2) = 12$. Ezek alapján az érintő egyenlete: $12(x - 2) = y - b - 12$, ami $y = 12x + b - 12$ alakban is írható.



A feltétel szerint ez átmegy az origón, így $b - 12 = 0$, vagyis $b = 12$. Így $f(x) = 3x^2 + 12$, a kérdéses érintő egyenlete pedig: $y = 12x$.

A parabola paramétere: $p = \frac{1}{6}$, a parabola vezéregyenesének egyenlete:

$$y = 12 - \frac{1}{12} = \frac{143}{12}.$$

Vagyis az érintő a parabola vezéregyenesét a $\left(\frac{143}{144}; \frac{143}{12}\right)$ pontban metszi.

$$\begin{aligned} b) \quad T &= \int_0^2 (3x^2 + 12) dx - \int_0^2 12x dx = \int_0^2 (3x^2 - 12x + 12) dx = \\ &= \left[3 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + 12x \right]_0^2 = (8 - 24 + 24) - 0 = 8. \end{aligned}$$

8. A tojásokat 15 db-os dobozokban árulják. Minden tojás $\frac{1}{15}$ valószínűséggel sérült.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy doboz csak ép tojásokat tartalmaz?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy doboz kettő vagy több törött tojást tartalmaz?

c) A boltban tízen vesznek egy-egy doboz tojást. Mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük ketten visznek haza csupa ép tojást tartalmazó dobozt? (16 pont)

Megoldás. a) $P(0 \text{ db törött}) = \left(\frac{14}{15}\right)^{15} \approx 0,355$. Vagyis kb. 35,5% a valószínűsége annak, hogy egy doboz csak ép tojásokat tartalmaz.

b) Már tudjuk, hogy $P(0 \text{ db törött}) \approx 0,355$. Kiszámítjuk annak a valószínűségét is, hogy egy doboz pontosan 1 db törött tojást tartalmaz:

$$P(1 \text{ db törött}) = 15 \cdot \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{14} \approx 0,381.$$

Ezek alapján: $P(\text{kettő vagy több törött}) = 1 - 0,355 - 0,381 = 0,264$, azaz 26,4%. Vagyis kb. 26,4% a valószínűsége annak, hogy egy doboz kettő vagy több törött tojást tartalmaz.

c) Ha nincs a dobozban törött tojás, annak a valószínűsége: 0,355, ha van benne törött, annak a valószínűsége: 0,645. Tehát:

$$P = \binom{10}{2} \cdot 0,355^2 \cdot 0,645^8 \approx 0,170,$$

azaz kb. 17%. Vagyis kb. 17% a valószínűsége annak, hogy tíz vásárló között kettő olyan lesz, akik csupa ép tojást tartalmazó dobozt vásároltak.

9. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{x + y} \right| = 1.$$

(16 pont)

Megoldás. A tört nevezője miatt: $x + y \neq 0$. Az abszolút értéket felbontva két esetet kell vizsgálnunk:

I. eset: $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 1.$

Az egyenletet rendezve az $x^2 - x + (y^2 - y) = 0$, x -re másodfokú egyenlet adódik. Akkor van valós gyök, ha $D = 1 + 4y - 4y^2 \geq 0$. Ez akkor teljesül, ha

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Mivel y egész szám, így $y = 0$ vagy $y = 1$ lehet.

Ha $y = 0$, akkor $x = 1$ vagy $x = 0$ lehet.

Ha $y = 1$, akkor $x = 1$ vagy $x = 0$ lehet.

II. eset: $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = -1.$

Az egyenletet rendezve az $x^2 + x + (y^2 + y) = 0$, x -re másodfokú egyenletet kapjuk. Akkor van valós gyöke, ha $D = 1 - 4y - 4y^2 \geq 0$. Ez akkor teljesül, ha

$$\frac{-1 - \sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Mivel y egész szám, így $y = -1$, vagy $y = 0$ lehet.

Ha $y = -1$, akkor $x = 0$ vagy $x = -1$.

Ha $y = 0$, akkor $x = 0$ vagy $x = -1$.

A kikötés figyelembevételével a következő megoldásokat kaptuk:

$$(1; 0), \quad (0; 1), \quad (1; 1), \quad (0, -1), \quad (-1, -1), \quad (-1; 0).$$