A 42. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia feladatainak megoldása[1]

Elméleti feladatok

1. feladat. Egy háromtest-probléma és a LISA

1.1. A két tömegpont mozgásegyenlete:

$$m\omega_0^2 r = G\frac{mM}{(r+R)^2},$$
$$M\omega_0^2 R = G\frac{mM}{(r+R)^2}.$$

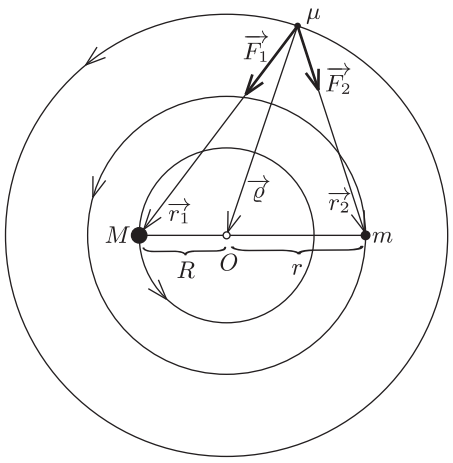
Bármelyik egyenletet rendezve, és felhasználva, hogy

$$\frac{M}{r} = \frac{m}{R} = \frac{M+m}{R+r},$$

a keresett szögsebesség

$$\omega_0 = \sqrt{G\frac{M+m}{(R+r)^3}}.$$

1.2. A μ tömeg infinitezimálisan kicsi, ezért gravitációs ereje nem befolyásolja a másik két test mozgását.



1. ábra

A μ tömegű testet is a rá ható gravitációs erők eredője tartja körpályán (*1. ábra*):

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \mu\omega_0^2\overrightarrow{\varrho},$$

vagyis

$$G\frac{M\mu}{r_1^3}\overrightarrow{r_1} + G\frac{m\mu}{r_2^3}\overrightarrow{r_2} = G\mu\frac{M+m}{(R+r)^3}\overrightarrow{\varrho}.$$

Másrészt a tömegközéppont definíciója szerint

$$\overrightarrow{\varrho} = \frac{M\overrightarrow{r_1} + m\overrightarrow{r_2}}{M+m},$$

amit behelyettesítve, és egyszerűsítve

$$\frac{M}{r_1^3}\overrightarrow{r_1} + \frac{m}{r_2^3}\overrightarrow{r_2} = \frac{M}{(R+r)^3}\overrightarrow{r_1} + \frac{m}{(R+r)^3}\overrightarrow{r_2}.$$

A fenti egyenlet két oldalán $\overrightarrow{r_1}$ és $\overrightarrow{r_2}$ együtthatói külön-külön meg kell egyezzenek, ahonnan $r_1 = r_2 = R + r$ adódik, vagyis a három test egy *szabályos háromszög* csúcsain helyezkedik el. A koszinusztétel alapján

$$\varrho^2 = R^2 + r^2 - 2R(R+r)\cos 60^\circ = R^2 + Rr + r^2.$$

[1] Az elméleti feladatok szövegét a múlt havi számunkban közöltük.

Ezek szerint
1.2.1. μ és M távolsága: $r_1 = R + r$,
1.2.2. μ és m távolsága: $r_2 = R + r$,
1.2.3. μ és a tömegközéppont távolsága: $\varrho = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$.

1.3. A feladat az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések körfrekvenciájának meghatározása volt. Ehhez a versenyzők azt az útmutatást kapták, hogy tételezzék fel a rezgő test perdületének megmaradását. Ebből kiindulva és még az energia megmaradását is felírva hosszas számolás után az $\omega = \sqrt{7}\omega_0/2$ eredmény kapható (lásd a `http://www.ipho2011.org/contents/problems_solutions` honlapon a „hivatalos" megoldást).

Sajnos ez a megoldás **hibás!** A korlátozott háromtest-problémában (amikor az egyik test tömege elhanyagolhatóan kicsi a másik kettőé mellett) sem a kis test perdülete, sem a mechanikai energiája *nem* megmaradó mennyiség! Ténylegesen még a vizsgált pont stabilitása sem valósul meg, ha $m/M > 0{,}04$; márpedig a feladatban a $m = M$ speciális esetet kellett volna vizsgálni. Ekkor a kérdéses pont (a szabályos háromszög egyik csúcspontja) körül egyáltalán nem alakulhatnak ki harmonikus rezgések!

1.4. Az űrhajók egymás körül is ω szögsebességgel keringenek, így a relatív sebességük

$$v_{\text{rel.}} = L\omega = \frac{2\pi}{T}L,$$

ahol L a „karok" hossza, T pedig a Föld keringési ideje. Behelyettesítve

$$v_{\text{rel.}} = 996\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2. feladat. Elektromosan töltött szappanbuborék

2.1. A szappanbuborék belsejében a P_i nyomás[2] a felületi feszültség miatt nagyobb, mint a külső (atmoszférikus) nyomás:

$$P_i = P_a + \frac{4\gamma}{R_0}.$$

(Ezt az összefüggést pl. a képzeletben félbevágott buborék egyik felére felírt erőegyensúly feltételéből származtathatjuk.)

Az egyesített gáztörvény a levegő intenzív állapotjelzőire így írható fel:

$$\frac{P}{\varrho T} = \text{állandó}.$$

Ennek alapján a kérdéses arány:

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}.$$

2.2. A megadott számértékek felhasználásával:

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = \frac{4\gamma}{R_0 P_a} = 0{,}0001.$$

(Az eredmény azt mutatja, hogy a felületi feszültség hatására a nyomás igen csekély mértékben növekszik.)

2.3. A buborék lebegésének a feltétele az, hogy a buborékra ható felhajtóerő egyenlő nagyságú a buborék súlyával, ami a szappanhártya és a benne lévő levegő súlyának az összege:

$$\frac{4\pi}{3}R_0^3\varrho_a g = \left(4\pi R_0^2\varrho_s t + \frac{4\pi}{3}R_0^3\varrho_i\right)g = 4\pi R_0^2\varrho_s t g + \frac{4\pi}{3}R_0^3\frac{\varrho_a T_a}{T_i}\left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}\right)g.$$

Megfelelő átrendezés és a számszerű adatok behelyettesítése után a buborék lebegéséhez szükséges belső hőmérséklet:

$$T_{\text{í}} = \frac{R_0\varrho_a T_a}{R_0\varrho_a - 3\varrho_s t}\left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}\right) = 307{,}1\ \text{K}.$$

A lebegéshez a buborékban lévő levegőnek valamivel több, mint 7 °C-kal melegebbnek kell lennie a külső levegő hőmérsékleténél.

2.4. Miközben a buborék belsejében a hőmérséklet a külső levegő hőmérsékletére csökken, a buborék sugara 0,8%-kal lecsökken, és a szappanhártya vastagsága is megnő. Ezeket a változásokat azonban a feladat szövegében szereplő

[2] Megtartottuk az olimpián alkalmazott, a hazai gyakorlattól néhol kicsit eltérő jelöléseket.

tanács szerint elhanyagoljuk. Nyugvó levegőben ilyenkor a buborék a talaj felé süllyed. Az u sebességgel felfelé áramló levegő akkor akadályozza meg a buborék leesését, ha a Stokes-féle közegellenállási erő megegyezik vagy meghaladja a buborék súlyának és a felhajtóerőnek a különbségét:

$$6\pi\eta R_0 u \geq \left(4\pi R_0^2 \varrho_s t + \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_i\right) g - \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_a g =$$
$$= \left(4\pi R_0^2 \varrho_s t + \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_a \left[1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a}\right]\right) g - \frac{4\pi}{3} R_0^3 \varrho_a g.$$

Átrendezés után a felfelé áramló levegő sebességére a következő relációt kapjuk:

$$u \geq \frac{2R_0 \varrho_s t g}{3\eta} + \frac{8R_0 \varrho_a \gamma g}{9P_a \eta}.$$

2.5. A számszerű adatok behelyettesítése után $u \geq 0{,}36$ m/s eredmény adódik.

Megjegyezzük, hogy a paraméteres kifejezés második tagja az első tagnál három nagyságrenddel kisebb, vagyis *elhanyagolható.* Ez is indokolja, hogy *a továbbiakban a felületi feszültségből adódó tagokat elhanyagoljuk.*

2.6. Elektromosan töltött szappanbuborékok esetén a felületi feszültség hatásához képest fordított nyomáskülönbség alakul ki a buborék belseje és a külső levegő között, mivel a buborék felületén lévő töltések taszítják egymást. Ezt a nyomáskülönbséget jelöljük így: ΔP_{el}. Ezzel a jelöléssel $P_a = P_i + \Delta P_{\text{el}}$; feladatunk az egyenlőség jobb oldalán lévő két tag meghatározása.

Elektromos töltések nélkül (a felületi feszültség hatásának elhanyagolásával) a buborékban a nyomás P_a, és a buborék térfogata a kezdeti sugár köbével, vagyis R_0^3-bel arányos. Feltöltött buborék esetén a nyomás P_i, a térfogat pedig a megnövekedett sugár köbével, vagyis R_1^3-bel arányos. Mivel a buborékban lévő levegő hőmérséklete nem változik, így alkalmazhatjuk rá a Boyle–Mariotte-törvényt, vagyis a nyomás és a térfogat fordított arányosságát:

$$P_i = \frac{R_0^3}{R_1^3} P_a.$$

A töltések következtében fellépő ΔP_{el} nyomásjárulékot a buborék falánál fellépő átlagos elektromos térerősség $E_{\text{átlag}}$ és az egységnyi felületre jutó töltés (töltéssűrűség) szorzataként számíthatjuk ki.[3] Az R_1 sugarú buborék belsejében a térerősség nulla, közvetlenül a buborék felületén kívül pedig kq/R_1^2, így

$$E_{\text{átlag}} = \frac{1}{2}\left(\frac{kq}{R_1^2} + 0\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}.$$

Másrészt a töltéssűrűség $q/\left(4\pi R_1^2\right)$, így az elektromos eredetű nyomáskülönbség:

$$\Delta P_{\text{el}} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{q^2}{R_1^4}.$$

Ugyanez a mennyiség a külső és a belső gáznyomás különbségeként is felírható, tehát

$$\frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{q^2}{R_1^4} = P_a - P_i = P_a\left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right),$$

ahonnan a keresett kifejezés pl. így adható meg:

$$\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right) = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 P_a R_0^4}.$$

2.7. Feltételezve, hogy a buborék sugarának $\Delta R = R_1 - R_0$ megváltozása (az eredeti sugárhoz viszonyítva) *kicsi,* a fenti formulában az

$$\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 = \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right)^4 \approx 1 + 4\frac{\Delta R}{R_0}$$

közelítés alkalmazható, s innen a sugár (kicsiny) növekedésére ez adódik:

$$\Delta R \approx \frac{q^2}{96\pi^2\varepsilon_0 P_a R_0^3}.$$

[3] Ezt legegyszerűbben úgy mutathatjuk meg, ha feltételezzük, hogy a vékony (de véges vastagságú) töltésrétegben a töltések eloszlása homogén. A Gauss-tétel alkalmazásával láthatjuk, hogy ekkor a belső nulla tér lineárisan növekedve éri el a külső felületen felvett értékét, tehát a töltésrétegben átlagosan a külső érték fele lép fel. Megmutatható azonban az is, hogy a vékony töltésrétegben tetszőleges töltéseloszlás esetén is a külső térerősség fele adja az átlagértéket.

2.8. A lebegés feltétele most is a felhajtóerő és a súly egyensúlya:

$$\frac{4\pi}{3}R_1^3\varrho_a g = \left(4\pi R_0^2\varrho_s t + \frac{4\pi}{3}R_0^3\varrho_i\right)g.$$

Ha a felületi feszültség hatását elhanyagoljuk, akkor a töltetlen buborék belsejében a kezdeti sűrűség megegyezik a külső levegő sűrűségével ($\varrho_i = \varrho_a$), hiszen a hőmérséklet is és a nyomás is (jó közelítéssel) ugyanakkora kívül és belül. A feltöltött buborék R_1 sugarát fejezzük ki ΔR segítségével:

$$\frac{4\pi}{3}R_0^3\left(1+\frac{\Delta R}{R_0}\right)^3\varrho_a g = \left(4\pi R_0^2\varrho_s t + \frac{4\pi}{3}R_0^3\varrho_i\right)g.$$

Közelítés és némi egyszerűsítés után ezt kapjuk:

$$\frac{4\pi}{3}R_0^2\left(3\Delta R\right)\varrho_a g = 4\pi R_0^2\varrho_s t g.$$

Helyettesítsük be ΔR helyére az előző alkérdés eredményét, és fejezzük ki a töltést:

$$q = \sqrt{\frac{96\pi^2\varepsilon_0 P_a R_0^3\varrho_s t}{\varrho_a}} \approx 256\ \mathrm{nC}.$$

3. feladat. Ion szóródása semleges atomon (100 éves a Rutherford-atommodell)

3.1. A Coulomb-törvény alapján az elektromos térerősség a dipólus tengelyén, attól r távolságra:

$$E_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-a)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+a)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-2} - \left(1+\frac{a}{r}\right)^{-2}\right].$$

Mivel $a/r \ll 1$, alkalmazhatjuk a kis x-ekre érvényes $(1+x)^n \approx 1+nx$ közelítést:

$$E_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(1+2\frac{a}{r}\right) - \left(1-2\frac{a}{r}\right)\right] = \frac{2qa}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Vektorokkal kifejezésre juttathatjuk a dipólus által keltett térerősség nagyságát és irányát is (a dipól tengelye mentén):

$$\vec{E}_P = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

3.2. (Az eredeti ábra jelöléseivel) az ion által a semleges atom helyén létrehozott térerősség a Coulomb-törvény szerint

$$\vec{E}_{\mathrm{ion}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3},$$

így a neutrális atom

$$\vec{p} = \alpha\vec{E}_{\mathrm{ion}} = -\frac{\alpha Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

nagyságú és irányú elektromos dipólmomentumra tesz szert. A 3.1. alkérdés végeredményét felhasználva ez a dipólmomentum az ion helyén

$$\vec{E}_P = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-\frac{\alpha Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{\alpha Q}{8\pi^2\varepsilon_0^2 r^5}\frac{\vec{r}}{r}$$

térerősséget hoz létre, így az ionra ható erő:

$$\vec{f} = Q\vec{E}_P = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2 r^5}\frac{\vec{r}}{r}.$$

A kifejezésből leolvasható, hogy az erő Q előjelétől függetlenül mindig a semleges atom felé mutat, vagyis vonzó jellegű.

3.3. Az egymástól r távolságra levő ion és atom kölcsönhatási energiája egy előjeltől eltekintve azzal a munkával egyezik meg, amennyit a két részecske „végtelen messzire” történő eltávolítása során végzünk:

$$U(r) = -\int_r^\infty \left|\vec{f}(\vec{r}\,')\right|\mathrm{d}r' = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2}\int_r^\infty \frac{1}{r'^5}\,\mathrm{d}r' = \frac{\alpha Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2}\left[\frac{1}{r'^4}\right]_r^\infty = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2 r^4}.$$

3.4. A centrális erőtér miatt a mozgó ion perdülete az atom helyére vonatkoztatva megmarad. Amikor az ion legközelebb kerül az atomhoz, a sebességének nagysága maximális, iránya pedig merőleges a helyvektorára, így $mv_0 b = mv_{\max} r_{\min}$. A mechanikai energiamegmaradás szerint

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{\alpha Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2 r_{\min}^4}.$$

E két egyenletből a minimális távolságra a

$$\left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^4 - \left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^2 + \frac{\alpha Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2 b^4} = 0,$$

egyenletre jutunk, amely $r_{\min}^2$-ben másodfokú. Az egyenlet megoldásai:

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2 b^4}}}.$$

Ha $Q = 0$, akkor az ion egyenes pályán, b távolságra halad el a semleges atom mellett, így a két gyök közül a nagyobbat kell megtartanunk. Az ion és az atom közötti legkisebb távolság tehát

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2 b^4}}}.$$

3.5. Ha a b impakt paraméter elég nagy, az előző kérdésben kiszámított $r_{\min}$ távolságra közelíti meg az ion az atomot. A b paraméter csökkentésével azonban az $r_{\min}$-re kapott kifejezésben a négyzetgyökjel alatt negatív érték adódik, azaz nincs minimális távolság az ion és az atom között: az ion spirális pályán a semleges atomba csapódik. Ez akkor következik be, ha

$$b < b_0 = \left(\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

így az ion befogásának hatáskeresztmetszete

$$A = \pi b_0^2 = \pi\left(\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{|Q|}{2\varepsilon_0 v_0}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}.$$

Megjegyzés. A 3.4. és 3.5. alkérdésekben tárgyaltak grafikusan is szemléltethetők az ún. *effektív potenciál* segítségével. Ha az energiamegmaradást kifejező

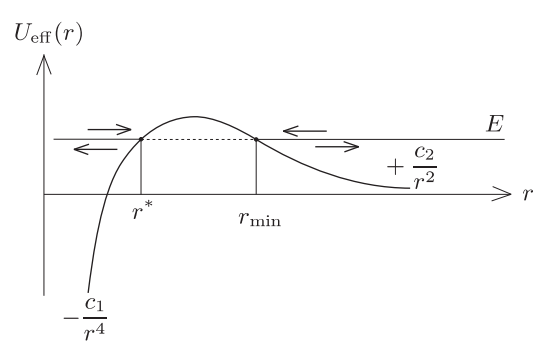
$$\frac{1}{2}m\left(v_r^2 + r^2\omega^2\right) + U(r) = E \quad \left(= \frac{1}{2}mv_0^2\right)$$

egyenletből a szögsebességet kiküszöböljük a perdületmegmaradás $mr^2\omega = J$ $(= mbv_0)$ törvényének felhasználásával, akkor a sugár irányú (radiális) mozgásra kapunk egyenletet:

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \left(U(r) + \frac{J^2}{2mr^2}\right) = E.$$

A zárójelben álló kifejezést effektív potenciálnak szokták nevezni. $U_{\text{eff}}(r)$ a két részecske valódi (vonzó jellegű) kölcsönhatási energiája mellett tartalmaz egy – a perdület nagyságától is függő – taszító („centrifugális") potenciális energiát is.

Az ion-atom távolság időbeli változása éppen úgy zajlik le, mint egy tömegpont egydimenziós mozgása $U_{\text{eff}}(r)$ potenciállal megadott erőtérben. (Kicsit erőltetett hasonlattal: ahogy egy golflabda gurul az $U_{\text{eff}}(r)$ függvénnyel megadott domborzati viszonyok között.)



2. ábra

Jelen esetben az effektív potenciál $-\frac{c_1}{r^4}+\frac{c_2}{r^2}$ alakú, ahol c_1 és c_2 a feladatban szereplő paraméterekkel kifejezhető pozitív állandók (*2. ábra*). A nagy távolságból érkező, E energiájú ion radiális sebessége ott válik nullává, ahol $U_{\text{eff}}(r)=E$. Ez a feltétel a korábban kiszámított $r=r_{\min}$ értéknél és egy ennél kisebb $r=r^*$-nál is fennáll. Az ion (ha csak a radiális mozgását nézzük) nyilván $r=r_{\min}$ távolságnál „fordul vissza", a potenciálhegy $r^*<r<r_{\min}$ tartományába egyáltalán el sem jut. (Érdekes, hogy a kvantumelméletben nem ez a helyzet: a hullámként viselkedő ion „át tud bújni" a potenciálhegy alatt, és még akkor is eljut az atomig, amikor ezt a klasszikus fizika szerint nem tehetné meg. Ez a furcsa jelenség az ún. *alagúteffektus*.)

Az $r=r^*$-os fordulópontnak is van fizikai jelentése: ha az ion nem végtelen messziről, hanem az atom közeléből, az atomtól távolodva indulna, akkor nem tudna tetszőleges messze eljutni, hanem $r=r^*$-nál a radiális mozgás visszafordulna (tehát ez az érték lenne az atom és az ion közötti maximális távolság.)

Ha a b paraméter (és az ezzel arányos perdület) nem elég nagy, akkor az effektív potenciál maximumának értéke az E energia alá kerül. Ilyenkor a messziről érkező részecske – már a klasszikus fizika törvényei szerint is – beleesik az atomba.

Kísérleti feladatok

1. feladat. Elektromos fekete doboz: kapacitív elmozdulásérzékelő

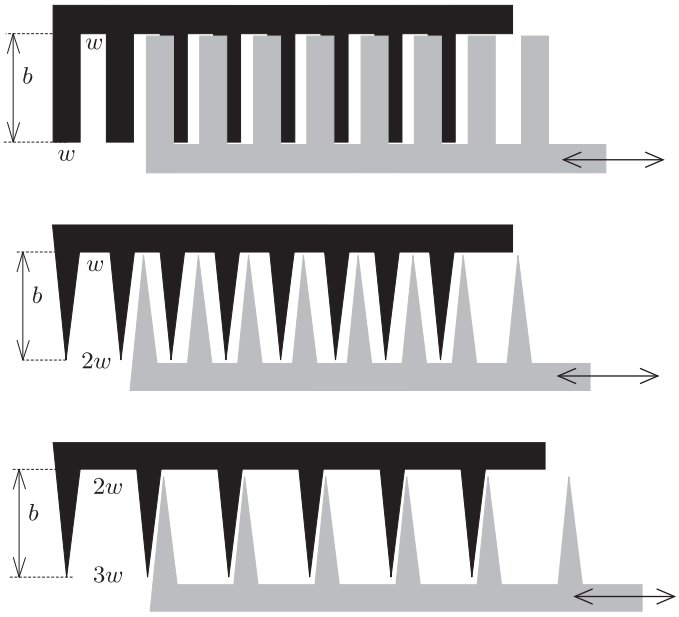
A mérési feladatban szereplő elektromos fekete doboz egy síkkondenzátor, melynek két, egymás felett elcsúsztatható fémlemeze azonos alakú fogakból áll, melyeket egy vékony szigetelőréteg választ el egymástól.

A kondenzátor kapacitását a versenyzők egy *Kipp-oszcillátor* segítségével mérhették. A Kipp-oszcillátor egy olyan áramkör, melynek frekvenciáját az

$$f=\frac{\alpha}{C+C_S}$$

összefüggés határozza meg, ahol C az oszcillátorra kötött kondenzátor kapacitása, α és C_S pedig az eszközre jellemző állandók. Az oszcillátor frekvenciáját digitális multiméterrel lehetett mérni.

A feladat első részében az oszcillátor kalibrálása, azaz α és C_S értékének meghatározása volt. Ehhez 4 különböző, ismert kapacitású kondenzátor állt a versenyzők rendelkezésére. Azt is észre kellett venni, hogy a kondenzátorok különböző kapcsolásaival újabb kapacitások is előállíthatók, és így nem csak 4 kalibrációs pontot lehet felvenni. Ha a frekvencia reciprokát a kapacitás függvényében ábrázoljuk, és a pontokra egyenest illesztünk, akkor az egyenes meredeksége $1/\alpha$, tengelymetszete C_S/α, így ezek az állandók meghatározhatók.



3. ábra

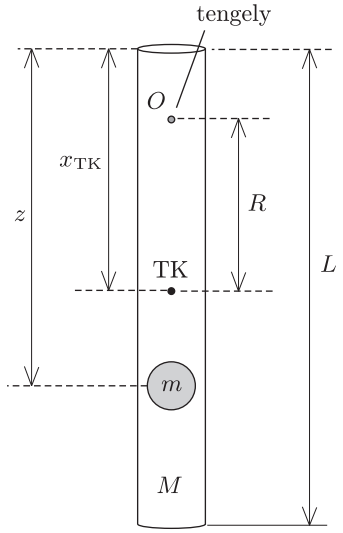
A feladat második részében a síkkondenzátor geometriai alakját kellett meghatározni. A kalibrált Kipp-oszcillátor segítségével meg kellett mérni a kondenzátor C kapacitását a mozgatható kondenzátorlemez x elmozdulásának függvényében. Az eredmények alapján először el kellett dönteni, hogy a lemezek fogazása milyen. Ehhez megadtak három lehetséges fogalakot (*3. ábra*), mindegyikhez meg kellett határozni elméleti megfontolások alapján, hogy milyen jellegű $C(x)$ függvényt várunk, majd a mérési adatok alapján ki kellett választani, hogy a fekete dobozban milyen fogazás van. Ezek után a kimért $C(x)$ függvény alapján meg kellett határozni a fogak geometriai méreteit.

Mivel a Kipp-oszcillátor frekvenciája a mozgatható kondenzátorlemez helyzetétől függ, az eszközt digitális tolóméróként lehet használni. A harmadik részben ennek a digitális tolómérőnek a felbontását kellett kiszámítani, azaz azt a legkisebb elmozdulást, amit az eszközzel még mérni lehet.

2. feladat. Mechanikai fekete doboz: csőben rögzített golyó

A mechanikai fekete doboz egy zárt alumíniumcsőből és egy, a cső belsejében ismeretlen helyen rögzített golyóból állt. A 30 cm hosszú csövön centiméterenként lyukak (összesen 16 db) voltak fúrva, melyek segítségével a csövet vízszintes tengely körüli lengésbe lehetett hozni. A versenyzőknek roncsolásmentes mérésekkel kellett a rendszer olyan tulajdonságait megállapítani, mint (*i*) a tömegközéppont helye, (*ii*) a cső M és a golyó m tömegének aránya és (*iii*) a golyó csövön belüli helyzete. Ezen kívül meghatározandó volt (*iv*) a nehézségi gyorsulás értéke is.

Konkrét mérési utasításokat ezúttal nem kaptak a versenyzők, csak a felhasználható eszközök jelenthettek támpontot a mérési módszerek kitalálásában: asztalra rögzíthető tengely a rúd lengetéséhez, vonalzó, stopper, ragasztószalag a tengely asztalra rögzítéséhez, illetve egy méternyi fonál.



4. ábra

(*i*) A tömegközéppont $x_{TK} = (mz + ML/2)/(m + M)$ helyét a diákok a legkülönbözőbb módokon határozták meg: többen az asztal szélén egyensúlyozták ki a csövet, mások egy vagy két szál fonállal függesztve fel a rendszert azt használták ki, hogy a tömegközéppont mindig a felfüggesztési pont alatt helyezkedik el.

(*ii–iv*) Nehezebb feladat volt a rúd és a cső tömegarányának, a golyó helyzetének és a g nehézségi gyorsulásnak a meghatározása. A kis lengéseket végző cső fizikai ingának tekinthető, melynek lengésideje (a *4. ábra* jelöléseit használva)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_O}{(M+m)gR}},$$

ahol a Steiner-tétel értelmében $\Theta_O = \Theta_{TK} + (M+m)R^2$. A rendszer tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka pedig (a golyóra a pontszerű közelítést alkalmazva):

$$\Theta_{TK} = m(z - x_{TK})^2 + M\left(x_{TK} - \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}ML^2.$$

A periódusidő tehát a

$$T(R) = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_{TK} + (M+m)R^2}{(M+m)gR}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_{TK}}{(m+M)gR} + \frac{R}{g}}$$

módon függ a felfüggesztési pont tömegközépponttól mért távolságától. Ez a kifejezés kis átalakítással a

$$T^2R = \frac{4\pi^2}{g}R^2 + \frac{4\pi^2\Theta_{TK}}{(m+M)g}$$

alakra hozható. A periódusidőt tehát az R távolság függvényében megmérve, majd T^2R-et R^2 függvényében ábrázolva a mért pontok egy egyenesre illeszkednek, melynek meredekségéből a gravitációs gyorsulást, g-ből és a tengelymetszetből pedig a $\Theta_{TK}/(m+M)$ arányt lehet meghatározni. A tömegközéppontra vonatkozó egyenlet felhasználásával a kérdezett m/M tömegarány és a golyó z helyzete innen már kiszámolható.

Másik lehetséges eljárás kínálkozik a rendszer paramétereinek meghatározására, ha észrevesszük, hogy a kis lengések T periódusideje a felfüggesztési pont R helyzetének függvényében egy minimummal rendelkezik. A $T(R)$ görbe minimumhelyéből és a minimális lengésidőből ugyancsak kiszámolhatóak a kérdéses mennyiségek, de a lapos minimum miatt ez az eljárás pontatlanabb, mint az elsőként ismertetett módszer, ezért ezt az alternatív megoldást a rendezők csak fele pontszámmal „jutalmazták”.

Honyek Gyula, Vankó Péter, Vigh Máté