I. rész

1. A Bergengóc ötvösök kétféle fémből készítik ékszereiket.

A holdfém sűrűsége 5000 kg/m^3, beszerzési ára 1000 ft/g (a „ft” a Bergengóc fizetőeszköz, a fémtallér rövidítése).

A napfém sűrűsége 6000 kg/m^3, beszerzési ára 2000 ft/g.

A fémekből kétféle ötvözetet készítenek. Az első ötvözet 1 cm^3-éhez 0,6 cm^3 holdfémet és 0,4 cm^3 napfémet használnak fel, míg a második ötvözet 1 cm^3-éhez 0,4 cm^3 holdfémet és 0,6 cm^3 napfémet használnak fel (az ötvözés során nem kell anyagveszteséggel számolni).

a) Mennyi a kétféle ötvözet grammonkénti anyagköltsége?

Az elkészült ékszerek árát úgy kalkulálják, hogy az ékszer grammban adott tömegét megszorozzák az adott ötvözet grammonkénti anyagköltségével, és erre tesznek még rá 20%-ot.

b) Mennyi annak az ötvösnek a haszna, aki a 6,3 grammos első ötvözetből álló nyakláncot tévedésből úgy adja el, mintha a második ötvözetből készült volna? (*11 pont*)

2. Hány olyan (egybevágóságtól eltekintve) különböző téglalap van, melynek oldalai (cm-ben) egész számok, míg területe és kerülete (cm^2-ben és cm-ben) 100-nál nem nagyobb négyzetszám? (*12 pont*)

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

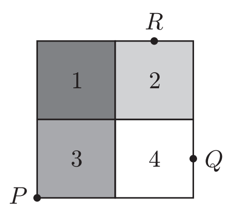
$$a)\qquad \log_4(x+1)+\log_4(x+2)=\log_2\sqrt{6},$$

$$b)\qquad \frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2}-\frac{2x^2-2x-12}{x^2-7x+12}=1.$$

(*14 pont*)

4. Peti tíz egyforma 2 egység élű építőkockából tornyot épít. A torony alapja 4 cm × 4 cm-es négyzet, de az egyes részeinek más-más a magassága.

(A felülnézeti *ábra* azt mutatja, hogy egy-egy rész hány darab 2 × 2 × 2 cm-es kockából áll.)



Az ábrán látható P, Q, R pontok az egyes részek legmagasabban lévő építőkockáinak a felső lapján vannak. P az egyik négyzetlap csúcsa, míg Q és R a felső négyzetlapok megfelelő éleinek felezőpontjai.

a) Mekkora a (térbeli) PQR háromszög P-nél lévő szöge?

b) Peti 4 piros, 3 fehér, 2 zöld és 1 kék kockából építi meg a fenti tornyot.

Hányféle különböző felülnézeti ábra áll így elő? (A nem identikus egybevágósági transzformációval egymásba vihető ábrákat különbözőnek tekintjük.) (*14 pont*)

II. rész

5. *a*) Igazoljuk, hogy a következő két sorozat konvergens, és közös a határértékük:

$$a_n=\frac{6n^2-n-1}{2n^2+n+1},\qquad b_n=\sqrt{n^2+6n+12}-n.$$

b) Igazoljuk, hogy a fenti a_n sorozat minden tagja kisebb a fenti b_n sorozat valamennyi tagjánál. (*16 pont*)

6. A térbeli derékszögű-koordináta-rendszerben felveszünk 3 piros pontot: $A(1;0;0)$, $B(2;0;0)$, és $C(3;0;0)$, valamint 3 fehér pontot: $D(0;1;0)$, $E(0;2;0)$, és $F(0;3;0)$, valamint 3 zöld pontot: $G(0;0;1)$, $H(0;0;2)$, és $I(0;0;3)$.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk a kilenc pont közül hármat úgy, hogy a kiválasztott pontok egy háromszög csúcsai legyenek. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott háromszögnek vannak azonos színű csúcsai?

b) A kilenc pont közül válasszunk ki úgy néhányat, hogy az általuk meghatározott test térfogata a lehető legnagyobb legyen. Mely csúcsokat válasszuk ki, és mekkora lesz ekkor a kérdéses térfogat? (*16 pont*)

7. Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben a következő két kört:

$$k_1 \colon x^2 + 4x + y^2 + y = 2 \quad \text{és} \quad k_2 \colon x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12.$$

Mekkora annak a síkrésznek a területe, amelyet mind a két kör lefed? (*16 pont*)

8. A p paraméter mely értékeire lesz a

$$px^2 - (p-1)x - \frac{3}{4}p + \frac{1}{2} = 0$$

a) egyenletnek egy megoldása;
b) egyenletnek két megoldása, az egyik pozitív, a másik negatív;
c) egyenletnek gyöke a -3;
d) egyenlet gyökeinek az aránya 1 : 2? (*16 pont*)

9. Kati „peches”-számai a 3-as és a 7-es.

Egy nap 1-től kezdve elkezdte felírni a pozitív egészeket, de azokat a számokat, amikben volt hármas, vagy hetes jegy kihagyta.

a) Milyen számjegyekből áll a Kati által felírt 2015-dik szám?
b) Hanyadik számként írta fel Kati a 2015-ös számot? (*16 pont*)