

Megoldásvázlatok a 2013/4. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. Az iskolai sakkbajnokságon mindenki pontosan egyszer játszott mindenkivel. Amikor 42 partit lejátszottak, akkor még mindkinek négy volt hátra. Hányan szerepeltek ezen a bajnokságon? (11 pont)

Megoldás. Legyen a szereplők száma n . Az összes mérkőzések száma: $\frac{n(n-1)}{2}$. Ha mindkinek még 4 játék van hátra, az összesen $\frac{4n}{2}$ még lejátszandó partit jelent. Ezért a lejátszott mérkőzések száma:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{4n}{2} = 42,$$

amiből az $n^2 - 5n - 84 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. A gyökök: $n_1 = 12$, $n_2 = -7$.

Vagyis 12 fő szerepelt a bajnokságon.

2. Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) az $f(x) = |x+2| + |x-1|$

hozzárendeléssel megadottat a $[-2; 1]$ intervallumon;

b) a $g(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \sin x \cos x$

hozzárendeléssel megadottat a $[-\pi; \pi]$ intervallumon;

c) a $h(x) = \log_{2013} x \cdot \log_x 2014 \cdot \log_{2014} 2013$

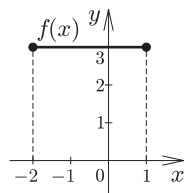
hozzárendeléssel megadottat a $]0; 3]$ intervallumon.

(13 pont)

Megoldás. a) A megadott $[-2; 1]$ intervallumon így írhatjuk az f függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = |x+2| + |x-1| = (x+2) - (x-1) = 3.$$

Vagyis ezen az intervallumon a függvény konstans, a mellékelt ábrán látható a képe.

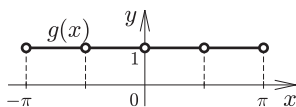


b) A g függvény hozzárendelési szabályát át tudjuk alakítani:

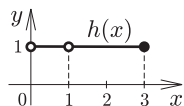
$$g(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \sin x \cos x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

A $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ miatt $x \neq \frac{k\pi}{2}$, ahol k egész számot jelöl.

A megadott $[-\pi; \pi]$ intervallumra esik a $k = -1; 0; 1$ esetén kapott érték, vagyis a g függvény nincs értelmezve a $-\pi$, 0 és π helyeken, egyébként a függvény konstans. A mellékelt ábrán látható a képe.



c) A logaritmus definíciója alapján tudjuk, hogy x pozitív valós szám, de nem egyenlő 1-gyel.



A h függvény hozzárendelési szabályában minden logaritmust átírhatunk 2013-as alapra:

$$\begin{aligned} h(x) &= \log_{2013} x \cdot \log_x 2014 \cdot \log_{2014} 2013 = \\ &= \log_{2013} x \cdot \frac{\log_{2013} 2014}{\log_{2013} x} \cdot \frac{\log_{2013} 2013}{\log_{2013} 2014} = \log_{2013} 2013 = 1. \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg az egyenletet, ahol n tetszőleges, 1-nél nagyobb, pozitív egész szám:

$$\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \dots + \sqrt{x^2 + nx - (n+1)} = 0. \quad (13 \text{ pont})$$

Megoldás. Az egyenlet bal oldalán n tagú összeg szerepel, az összeg minden tagja nemnegatív valós szám. Nemnegatív valós számok összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyik nulla.

A négyzetgyökök alatt álló másodfokú kifejezéseknek megkeressük külön-külön a zérushelyeit. Kezdjük az általános taggal, az $x^2 + nx - (n+1)$ -gyel. Mivel a két zérushely összege $-n$, szorzata pedig $-(n+1)$, azért a zérushelyek: $x_1 = -(n+1)$, $x_2 = 1$. Vagyis minden tetszőleges, 1-nél nagyobb, pozitív egész n szám esetén a másodfokú kifejezések egyik zérushelye az 1 lesz.

Ezek szerint az egyenlet egyedüli megoldása az 1.

4. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkedik az $A(-7; 5)$ pont, továbbá az $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 17$ egyenletű kört az $E(-2; 2)$ pontban érinti. (14 pont)

Megoldás. Az adott kör középpontjának koordinátái: $K(2; 3)$. A keresett kör középpontja rajta van az $E(-2; 2)$ és a $K(2; 3)$ pontokra illeszkedő egyenesen. Ennek az egyenesnek az irányvektora: $\overrightarrow{EK}(4; 1)$, vagyis az egyenlete: $x - 4y = -10$. A keresett körnek AE a húrja, ezért a kör középpontja illeszkedik az $A(-7; 5)$ és az $E(-2; 2)$ pontok által meghatározott húr felezőmerőlegesére is. A húr felezőpontja: $F(-\frac{9}{2}; \frac{7}{2})$, a húrfelező egyenes normálvektora: $\overrightarrow{AE}(5; -3)$, vagyis az egyenlete: $5x - 3y = -33$.

A két egyenes metszéspontjának koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} x - 4y &= -10 \\ 5x - 3y &= -33 \end{aligned} \right\}.$$

Vagyis a kör középpontjának koordinátái: $C(-6; 1)$.

A keresett kör sugarának hosszát is kiszámíthatjuk, az $A(-7; 5)$ és a $C(-6; 1)$ pontok távolságaként:

$$r = AC = \sqrt{(-7+6)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}.$$

A keresett kör egyenlete:

$$(x+6)^2 + (y-1)^2 = 17.$$

II. rész

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapja 26 cm, a szárai 85 cm hosszúak. Legyen az AB alap felezőpontja F , a beírt körének a középpontja K , a köré írt körének a középpontja O , a súlypontja S , a magasságpontja M .

a) Mekkora az ASO háromszög kerülete?

b) Milyen hosszú az FK szakasz?

c) Mekkora az MF szakasz hossza, és mekkora szögben látszik az AC szár az M pontból? (16 pont)

Megoldás. a) Az ASO háromszög OS oldalának hosszát az FO és az FS szakaszok különbségeként kapjuk. A feladatban szereplő F , K , O , S , M és C pontok egy egyenesre illeszkednek, a C csúcsból húzott magasságra, hiszen az ABC háromszög egyenlő szárú. Ennek a magasságnak a hosszát Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk az ACF derékszögű háromszögből:

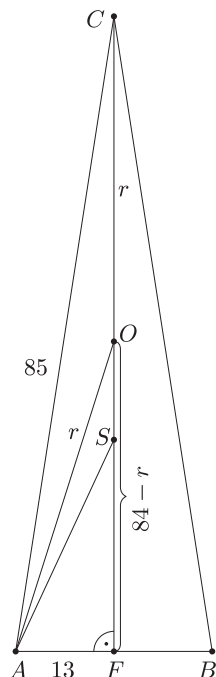
$$13^2 + CF^2 = 85^2, \quad \text{azaz} \quad CF = 84 \text{ cm}.$$

Mivel a súlypont a súlyvonalon az oldalhoz közelebbi harmadolópontra (és most CF súlyvonal), így $FS = 28$ cm.

A háromszög köré írt köre az alap egyenesétől $84 - r$ távolságra van, ahol r a körülírt kör sugara. Az AFO háromszögben Pitagorasz-tétellel (1. ábra):

$$\begin{aligned} 13^2 + (84 - r)^2 &= r^2, \\ 13^2 + 84^2 - 2 \cdot 84r &= 0, \end{aligned}$$

ebből $r = \frac{7225}{168} \approx 43,01$ (cm).



1.ábra

Vagyis

$$FO = 84 - \frac{7225}{168} = \frac{6887}{168} \approx 40,99 \text{ (cm)}.$$

Ezek alapján:

$$OS = FO - FS = \frac{6887}{168} - 28 = \frac{2183}{168} \approx 12,99 \text{ (cm)}.$$

$AO = r$, az AS szakasz hosszát az ASF derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel kapjuk:

$$13^2 + 28^2 = AS^2, \quad \text{azaz} \quad AS = \sqrt{953} \approx 30,87 \text{ (cm)}.$$

Tehát az ASO háromszög kerülete:

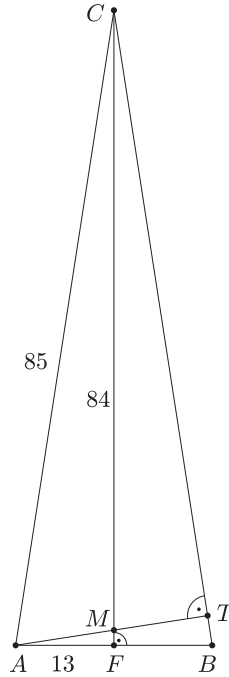
$$k = OS + AS + AO = 12,99 + 30,87 + 43,01 = 86,87 \text{ (cm)}.$$

b) A beírt kör középpontja az alaptól ϱ távolságra van (ahol ϱ a beírt kör sugarának a hossza), ezért a beírt kör sugarát meghatározhatjuk az ABC háromszög területének kétféle felírásából: $t = \varrho s = \frac{c \cdot m_c}{2}$, ahol s a háromszög

kerületének a fele: $s = \frac{2 \cdot 85 + 26}{2} = 98$. Ekkor $98\varrho = 1092$, ebből

$$\varrho = \frac{1092}{98} = \frac{78}{7}.$$

Tehát a beírt kör középpontja az alap egyenesétől $\frac{78}{7}$ ($\approx 11,14$) cm-re van.



2.ábra

c) Használjuk a 2. ábra jelöléseit. Meghatározzuk a szárhoz tartozó AT magasság hosszát. Írjuk fel az ABC háromszög területének kétszeresét kétféleképpen:

$$2 \cdot t = 26 \cdot 84 = 85 \cdot AT, \quad AT = \frac{2184}{85}.$$

Az ATB derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel:

$$TB = \sqrt{26^2 - \left(\frac{2184}{85}\right)^2} = \frac{\sqrt{114\,244}}{85} = \frac{338}{85}.$$

Mivel $AFM\triangle \sim ATB\triangle$ (a szögek páronként egyenlők), azért a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{MF}{13} = \frac{\frac{338}{85}}{\frac{2184}{85}}, \quad \text{vagyis} \quad MF = \frac{169}{84} \approx 2,01 \text{ (cm)}.$$

Mivel a keresett CMA szög az AMF derékszögű háromszög M csúcsánál található külső szöge, azért meghatározzuk az M -nél lévő δ belső szöget:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{13}{\frac{169}{84}} = \frac{84}{13}, \quad \delta \approx 81,2^\circ.$$

Vagyis a keresett CMA szög nagysága: $98,8^\circ$.

6. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\left. \begin{aligned} 3^{3x-1} &= 2y^3 - 11y - 693 \\ x &= \log_3(y+1) \end{aligned} \right\} \quad (16 \text{ pont})$$

Megoldás. A feladat értelmezési tartománya: x tetszőleges, $y > -1$ egész szám. A második egyenlet szerint: $3^x - 1 = y$. Ekkor:

$$3^{3x-1} = \frac{(3^x)^3}{3} = \frac{(y+1)^3}{3},$$

Ezt az első egyenletbe beírva:

$$\frac{(y+1)^3}{3} = 2y^3 - 11y - 693. \quad 0 = 5y^3 - 3y^2 - 36y - 2080.$$

Tudjuk, hogy y olyan nemnegatív egész szám, hogy egy háromhatványnál 1-gyel kisebb.

Írjuk a harmadfokú egyenletet a következő alakban: $2080 = y(5y^2 - 3y - 36)$. A zárójelben szereplő tényező egész szám, ezért y a 2080 osztója kell, hogy legyen.

A fentieket felhasználva y lehetséges értékei: 2, 8, 26, 80. Ezeket behelyettesítve a harmadfokú egyenletbe kapjuk, hogy csak az $y = 8$ a gyöke.

Visszahelyettesítéssel: $x = 2$. Vagyis az egyenletrendszer egyedüli megoldása: $x = 2, y = 8$.

Megjegyzés. Az $y = 8$ ismeretében a harmadfokú egyenletet

$$0 = (y - 8)(5y^2 + 37y + 260)$$

alakra tudjuk hozni. Így is látható, hogy csak egy megoldása lesz az egyenletrendszernek (hiszen a másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív).

7. a) Határozzuk meg az

$$f(x) = x^2 - 10x + 27$$

függvény integrálját a $[3; 6]$ intervallumon.

b) Mennyivel kell a megadott intervallumot eltolni, hogy az integrál 18 legyen?

(16 pont)

Megoldás. a)

$$\int_3^6 (x^2 - 10x + 27) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 27x \right]_3^6 = 72 - 180 + 162 - 9 + 45 - 81 = 9.$$

b) Legyen az eltolás nagysága negatív irányba d . Ekkor a következő integrált írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \int_{3-d}^{6-d} (x^2 - 10x + 27) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 27x \right]_{3-d}^{6-d} = \\ &= \frac{(6-d)^3}{3} - 5(6-d)^2 + 27(6-d) - \frac{(3-d)^3}{3} + 5(3-d)^2 - 27(3-d) = \\ &= 3d^2 + 3d + 9 = 18. \end{aligned}$$

Vagyis a $d^2 + d - 3 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásait kell megadnunk:

$$d_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}.$$

Tehát az intervallumot eltolhatjuk $d_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \approx 1,3$, illetve $d_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \approx -2,3$ egységgel.

Megjegyzés. Az *a)* kérdésre adott válaszunk alapján látható, hogy a *b)* kérdésben az fogalmazódott meg, hogy az integrál értéke duplázódjon meg az eltolás hatására. A kérdésben természetesen azért szerepel 18, mert az első kérdésre rosszul válaszolók így erre a kérdésre jó választ adhatnak.

8. Adott a következő számsokaság: 1, 1, 2, 4, 8, 8, 8, 9, 13.

a) Igazoljuk a fenti számsokaság esetén, hogy a számtani közepénél kisebb számok tőle számított távolságainak az összeg egyenlő azokkal, mint a nála nagyobb számok tőle számított távolságainak az összege.

b) Adjuk meg a fenti számsokasághoz azt a középértéket, amelyhez a számadatok tőle számított abszolút távolságainak összege minimális.

c) Adjuk meg a fenti számsokasághoz azt a középértéket, amelyhez a számadatok tőle számított távolságainak négyzetösszege minimális. (16 pont)

Megoldás. a) A számsokaság számtani közepe:

$$\bar{x} = \frac{1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 8 + 8 + 9 + 13}{9} = 6.$$

A számtani közepénél kisebb számok tőle számított távolságainak összege:

$$(6 - 1) + (6 - 1) + (6 - 2) + (6 - 4) = 16.$$

A számtani közepénél nagyobb számok tőle számított távolságainak összege:

$$(8 - 6) + (8 - 6) + (8 - 6) + (9 - 6) + (13 - 6) = 16.$$

Vagyis a két összeg valóban egyenlő.

b) A szöveg alapján azt az x számot keressük, amelyre a következő összeg minimális:

$$f(x) = |1 - x| + |1 - x| + |2 - x| + |4 - x| + |8 - x| + |8 - x| + |8 - x| + |9 - x| + |13 - x|.$$

Nézzük először az $f_1(x) = |1 - x| + |13 - x|$ hozzárendelésű függvényt.

Ha $x < 1$, akkor $f_1(x) = 1 - x + 13 - x = -2x + 14$.

Ha $1 \leq x \leq 13$, akkor $f_1(x) = -1 + x + 13 - x = 12$.

Ha $13 < x$, akkor $f_1(x) = -1 + x - 13 + x = 2x - 14$.

Ezek alapján elkészíthetjük az f_1 képét. Az f_1 minimumhelyeinek halmaza: $[1; 13]$.

Hasonlóan tudjuk ábrázolni közös koordináta-rendszerben az

$$f_2(x) = |1 - x| + |9 - x|,$$

$$f_3(x) = |2 - x| + |8 - x|,$$

$$f_4(x) = |4 - x| + |8 - x|$$

hozzárendeléssel adott függvényeket, végezetül pedig az

$$f_5(x) = |8 - x|$$

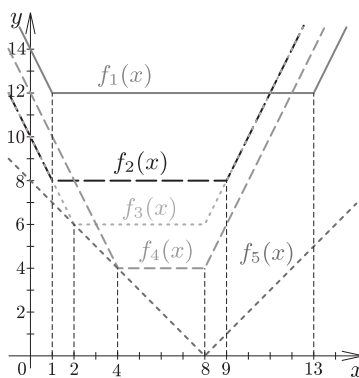
hozzárendeléssel adott függvényt is.

Az f_2 minimumhelyeinek halmaza: $[1; 9]$.

Az f_3 minimumhelyeinek halmaza: $[2; 8]$.

Az f_4 minimumhelyeinek halmaza: $[4; 8]$.

Az f_5 minimumhelyének halmaza: $\{8\}$.



Mivel

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + f_5(x), \quad \text{és} \quad [1; 13] \supset [1; 9] \supset [2; 8] \supset [4; 8] \supset \{8\},$$

azért a keresett minimumhely a 8. A keresés során az is kiderült, hogy a kapott szám pontosan a számsokaság mediánja.

c) A szöveg alapján azt az x számot keressük, amelyre a következő összeg minimális:

$$f(x) = (1 - x)^2 + (1 - x)^2 + (2 - x)^2 + (4 - x)^2 + (8 - x)^2 + (8 - x)^2 + (8 - x)^2 + (9 - x)^2 + (13 - x)^2.$$

Ezt a következő alakban is írhatjuk:

$$f(x) = 9x^2 - 2(1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 8 + 8 + 9 + 13)x + (1^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2 + 9^2 + 13^2).$$

Tudjuk, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ (ahol $a > 0$) hozzárendeléssel megadott másodfokú függvény minimumhelye: $x = -\frac{b}{2a}$. Jelen esetben:

$$x = -\frac{-2(1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 8 + 8 + 9 + 13)}{2 \cdot 9} = \frac{1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 8 + 8 + 9 + 13}{9} = 6.$$

Vagyis a keresett minimumhely a 6.

A keresés során az is kiderült, hogy a kapott szám pontosan a számsokaság számtani közepe.

9. Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelyre a

$$\frac{4 \sin^2 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 1}{\sin^2 x}$$

kifejezés minimális. Mennyi ez a legkisebb érték?

(16 pont)

Megoldás. Hegyesszögek esetén a kifejezés értelmezve van. Alakítsuk a kifejezést a következő módon:

$$\frac{4 \sin^2 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 1}{\sin^2 x} = 4 - 4 \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = 4 \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

A $4 \sin^2 x$ és az $\frac{1}{\sin^2 x}$ minden hegyesszög esetén pozitív valós szám.

Ismerjük két pozitív valós számra a mértani és a számtani közép közötti összefüggést: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Egyenlőség $a = b$ esetén van. Alkalmazzuk ezt az $a = 4 \sin^2 x$ és $b = \frac{1}{\sin^2 x}$ értékekre:

$$\sqrt{4 \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}} \leq \frac{4 \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}}{2},$$

amit így írhatunk:

$$2 \cdot \sqrt{4 \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}} = 2 \cdot 2 \leq 4 \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Tehát a minimális érték 4, ami

$$4 \sin^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

esetén lép fel. Ekkor $4 \sin^4 x = 1$, vagyis $\sin x = \pm 1$. Mivel x hegyesszög, azért $x = \frac{\pi}{4}$.

Megjegyzés. A $2(2 \sin^2 x + \frac{1}{2 \sin^2 x})$ egy pozitív szám és reciprokának összegének a kétszerese, ami akkor minimális, ha a szám 1.