

Megoldásvázlatok a 2013/3. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Számadó László

Budapest

I. rész

1. Egy (pozitív számokat tartalmazó) mértani sorozat szomszédos elemeinek különbségét sorban egymás mellé írtuk. Igazoljuk, hogy az így kapott sorozat is mértani sorozat, ahol $q \neq 1$. Adjuk meg az így kapott mértani sorozat első elemét és hányadosát. (11 pont)

Megoldás. Legyen az eredeti mértani sorozat első eleme a_1 , a hányadosa q . Ekkor a sorozat első néhány eleme: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, a_1q^5, \dots$.

A szomszédos elemek különbsége sorban:

$$a_1q - a_1, \quad a_1q^2 - a_1q, \quad a_1q^3 - a_1q^2, \quad \dots, \quad a_1q^n - a_1q^{n-1}, \quad \dots$$

Kiemelünk a_1 -et:

$$a_1(q - 1), \quad a_1(q^2 - q), \quad a_1(q^3 - q^2), \quad \dots, \quad a_1(q^n - q^{n-1}), \quad \dots$$

A második elemtől kezdve q is kiemelhető, mindig eggyel növekvő kitevővel:

$$a_1(q - 1), \quad a_1q(q - 1), \quad a_1q^2(q - 1), \quad \dots, \quad a_1q^{n-1}(q - 1), \quad \dots$$

Vagyis az így kapott sorozat valóban mértani sorozat.

Az első elem: $a_1(q - 1)$, a hányados: q .

2. a) Réka környezetbarát mosógélt árusít 3 literes kiszerelésben. Negyvenöt darab színes cédulát tett egy kis kosárba. Ezen cédulák közül tizenhármat „egy ajándék”, tizenöt „két ajándék”, és tizenkettő „három ajándék” szöveget tartalmaz. A vásárlók egy cédulát húznak a vásárlás előtt, és a rajta levő szövegek alapján ajándékot kapnak a következő sorrendben: 810 Ft-os univerzális tisztítószer, 510 Ft-os textilöblítőt, 290 Ft-os mosogatószer. Ezután a cédulát visszateszik a kosárba.

Vásárlás előtt László is húz egy cédulát. Mekkora valószínűséggel fog három ajándékot kapni?

Mennyi legyen a mosógél literjének ára, ha a forgalmazó cég átlagosan 535 Ft-os bevételt szeretne literenként kapni?

b) Elfelejtettük a telefon bekapcsolásához szükséges négyjegyű kódot. Csak azt tudjuk, hogy négy egymást követő pozitív számjegyből állt, de nem növekedő, és nem csökkenő sorrendben követik egymást a számjegyek. Hány ilyen négyjegyű szám van? (13 pont)

Megoldás. a) A kis kosárban negyvenöt cédula található, ezek közül csak tizenkettő megfelelő. Azt feltételezhetjük, hogy minden cédula kihúzásának ugyanannyi a valószínűsége, ezért alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűség-számítási modellt, azaz a kedvező esetek számát elosztjuk az összes eset számával:

$$P(\text{három ajándék}) = \frac{12}{45} = \frac{4}{15} \approx 0,27.$$

Legyen a mosógél literenkénti ára x Ft. Ekkor a 3 literes csomag ára $3x$ Ft. Minden vásárló húz egy cédulát, vagyis mindenki kap valamilyen értékben ajándékot, amit a 3 literes csomag árából le kell vonnunk.

Tudjuk, hogy a negyvenöt cédulából tizenhármat „egy ajándék”, tizenöt „két ajándék”, és tizenkettő „három ajándék” szöveget tartalmaz. Alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűség-számítási modellt:

$$\begin{aligned} P(\text{három ajándék}) &= \frac{12}{45} = \frac{4}{15}, \\ P(\text{kettő ajándék}) &= \frac{15}{45} = \frac{1}{3}, \\ P(\text{egy ajándék}) &= \frac{18}{45} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

A forgalmazó cég átlagosan 1605 Ft bevételt szeretne a 3 literes csomagért.

Tudjuk, hogy egy vásárló $\frac{4}{15}$ valószínűséggel $3x - 810 - 510 - 290$, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel $3x - 810 - 510$, és $\frac{2}{5}$ valószínűséggel $3x - 810$ Ft-ot fizet a 3 literes mosógélért. Vagyis:

$$\frac{4}{15} \cdot (3x - 810 - 510 - 290) + \frac{1}{3} \cdot (3x - 810 - 510) + \frac{2}{5} \cdot (3x - 810) = 1605.$$

Az egyenletet rendezve:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (3x - 1610) + 5 \cdot (3x - 1320) + 6 \cdot (3x - 810) &= 24\,075, \\ (12x - 6440) + (15x - 6600) + (18x - 4860) &= 24\,075, \\ 45x - 17\,900 &= 24\,075, \\ x &\approx 932,8. \end{aligned}$$

Vagyis a mosógél literenkénti ára kerekítve 933 Ft legyen (ekkor a 3 literes kiszerezésű csomagot 2799 Ft-ra lehet beárazni).

b) A lehetséges számjegynégyesek a következők:

1, 2, 3, 4;
2, 3, 4, 5;
3, 4, 5, 6;
4, 5, 6, 7;
5, 6, 7, 8;
6, 7, 8, 9.

Mindegyikből 24 darab négyjegyű szám készíthető, de ezek között kettő nem lesz megfelelő (a növekedő és a csökkenő sorrendűek). Vagyis 132 megfelelő négyjegyű szám van.

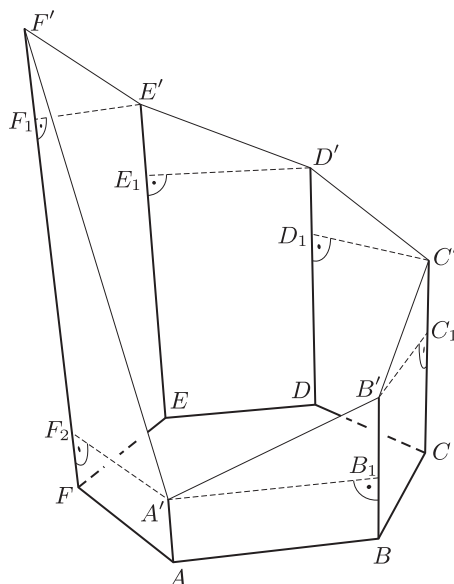
3. A 6 egység oldalhosszúságú, vízszintes síkban elhelyezkedő $ABCDEF$ szabályos hatszög minden csúcsában, a hatszög síkjára merőlegesen, a síknak ugyanazon az oldalán áll egy-egy szakasz. Ezeknek a szakaszoknak a hossza:

$$AA' = 2, \quad BB' = \frac{9}{2}, \quad CC' = 7, \quad DD' = \frac{19}{2}, \quad EE' = 12, \quad FF' = \frac{29}{2}.$$

a) Milyen hosszú az $A'B'C'D'E'F'$ töröttvonal?

b) Határozzuk meg az $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$ azon pontpárjait, amelyek pontosan egymás fölött helyezkednek el, majd határozzuk meg az ezen pontpárok közötti távolságokat.

Megoldás. A szöveg alapján készítettünk egy vázlatrajzot.



Az adatok alapján megállapíthatjuk, hogy a következő derékszögű háromszögek egybevágók:

$$\begin{aligned} A'B_1B'\triangle &\cong B'C_1C'\triangle \cong C'D_1D'\triangle \cong \\ &\cong D'E_1E'\triangle \cong E'F_1F'\triangle. \end{aligned}$$

Ezen háromszögek átfogói alkotják a töröttvonal öt darabját. Egy ilyen szakasz hossza a Pitagorasz-tétellel számolva:

$$A'B' = \sqrt{6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{13}{2}.$$

A töröttvonal hiányzó darabja, az $A'F'$ is egy derékszögű háromszög átfogója. Az $A'F_2F'$ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$A'F' = \sqrt{6^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{625}{4}} = \frac{\sqrt{769}}{2}.$$

Vagyis a töröttvonal hossza:

$$5 \cdot \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{769}}{2} = \frac{65 + \sqrt{769}}{2} \approx 46,37.$$

b) Legyen az $ABCDEF$ szabályos hatszög középpontja K , az $A'D'$ felezőpontja P_1 , a $B'E'$ felezőpontja P_2 , a $C'F'$ felezőpontja pedig P_3 . Amikor a hatszög síkjára merőlegesen ránézünk, akkor ezt a négy pontot egybeesőnek látjuk. Meghatározzuk a KP_1 , KP_2 és KP_3 szakaszok hosszát a szintkülönbségek megállapításához. Ezek a szakaszok rendre az $ADD'A'$, $BEE'B'$, $CFF'C'$ trapézok középvonalai, ezért:

$$\begin{aligned} KP_1 &= \frac{2 + \frac{19}{2}}{2} = \frac{23}{4}, \\ KP_2 &= \frac{\frac{9}{2} + 12}{2} = \frac{33}{4}, \\ KP_3 &= \frac{7 + \frac{29}{2}}{2} = \frac{43}{4}. \end{aligned}$$

Tehát a sorrend a szintkülönbségekkel: a P_3 van a legmagasabban, $\frac{5}{2}$ -del alatta helyezkedik el a P_2 , és ez alatt található szintén $\frac{5}{2}$ -re a P_1 .

4. Tekintsük a következő, általános tagjával adott sorozatot:

$$a_n = a \cdot n^2 + (2a + b) \cdot n - (b^2 - b - a).$$

Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok, akkor a sorozat bármely öt egymást követő tagjának összege osztható 5-tel. (14 pont)

Megoldás. Legyen az öt egymást követő tag összege: $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$. A sorozat általános tagjára vonatkozó képlet alapján ezt így írhatjuk:

$$\begin{aligned} & a \cdot (n-2)^2 + (2a+b) \cdot (n-2) - (b^2 - b - a) + \\ & + a \cdot (n-1)^2 + (2a+b) \cdot (n-1) - (b^2 - b - a) + \\ & + a \cdot n^2 + (2a+b) \cdot n - (b^2 - b - a) + \\ & + a \cdot (n+1)^2 + (2a+b) \cdot (n+1) - (b^2 - b - a) + \\ & + a \cdot (n+2)^2 + (2a+b) \cdot (n+2) - (b^2 - b - a) = \\ & = (5n^2 + 10) \cdot a + 5n \cdot (2a+b) - 5(b^2 - b - a) = \\ & = 5(an^2 + 2a + 2an + bn - b^2 + b + a). \end{aligned}$$

A zárójelben álló kifejezés nyilvánvalóan egész.

Vagyis a sorozat bármely öt egymást követő tagjának összege valóban osztható 5-tel.

II. rész

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $2^{3x} - 2^{2x} - 2^{x+1} = 0$;

b) $\sin 3x - \sin 2x - \sin x = 0$.

(16 pont)

Megoldás. a) Ha kiemelünk az egyenlet bal oldalán 2^x -t, akkor a következő alakban is írhatjuk az egyenletet:

$$2^x \cdot [(2^x)^2 - 2^x - 2] = 2^x \cdot (2^x - 2) \cdot (2^x + 1) = 0.$$

Azaz három lehetőség adódott a 2^x értékére: 0, 2 és -1 .

A 2^x hozzárendelésű exponenciális függvény értékkészlete alapján tudjuk, hogy csak a 2 a lehetséges érték. Ekkor $x = 1$.

Az egyenlet egyedüli megoldása az 1.

b) Használhatjuk a függvénytáblázatban is szereplő addíciós képletek közül az ide megfelelőeket.

$$\begin{aligned}(\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x) - 2 \sin x \cos x - \sin x &= 0, \\ 2 \sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x - 2 \sin x \cos x - \sin x &= 0.\end{aligned}$$

Emeljünk ki $\sin x$ -et az egyenlet bal oldalán:

$$\begin{aligned}\sin x(2 \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \cos x - 1) &= 0, \\ \sin x(3 \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \cos x - 1) &= 0, \\ \sin x(3 \cos^2 x + \cos^2 x - 1 - 2 \cos x - 1) &= 0, \\ \sin x(4 \cos^2 x - 2 \cos x - 2) &= 0, \\ \sin x(2 \cos^2 x - \cos x - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Egy szorzat akkor lesz nulla, ha legalább egy tényezője 0. Két esetet kapunk:

I. $\sin x = 0$. Ekkor $x_1 = k_1 \cdot \pi$, ahol $k_1 \in \mathbb{Z}$.

II. $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

$$(\cos x)_1 = \frac{1 + \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1+3}{4} = 1, \quad (\cos x)_2 = \frac{1 - \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

i) $(\cos x)_1 = 1$. Ekkor $x_2 = k_2 \cdot 2\pi$, ahol $k_2 \in \mathbb{Z}$.

ii) $(\cos x)_2 = -\frac{1}{2}$. Ekkor $x_3 = \frac{2\pi}{3} + k_3 \cdot 2\pi$, ahol $k_3 \in \mathbb{Z}$, $x_4 = \frac{4\pi}{3} + k_4 \cdot 2\pi$, ahol $k_4 \in \mathbb{Z}$.

A fenti megoldásokat így is írhatjuk rövidebben: $x_5 = k_5 \cdot \frac{2\pi}{3}$, ahol $k_5 \in \mathbb{Z}$, $x_6 = \pi + k_6 \cdot 2\pi$, ahol $k_6 \in \mathbb{Z}$.

6. Egy 0,5 méter széles és 1,2 méter hosszú bútorlap hosszabb éle a vízszintes talajra illeszkedik, a vele párhuzamos él pedig 30 cm magasságban helyezkedik el.

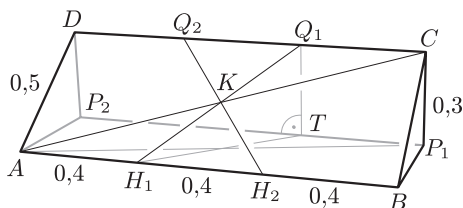
a) Mennyi az emelkedési szöge a bútorlap egyik átlóján felfelé haladó hangyának?

b) Mennyit változik ez a szög, ha az alsó él egyik harmadolópontjából a felső él nem szemközti harmadolópontjába igyekszik ez a hangya?

c) Határozzuk meg a két útvonal hajlásszögét.

(16 pont)

Megoldás. A szöveg alapján készíthetünk egy vázlatrajzot. A rajzon szereplő hosszúságokat méterben adtuk meg.



Haladjon a hangya az AC átlón felfelé, ekkor a második útvonal lehet a H_1Q_1 vagy a H_2Q_2 . Természetesen ezeknek a szakaszoknak a vízszintessel bezárt szöge egyenlő, csak a c) részben lesz fontos, hogy kétféle útvonal is lehetséges.

a) Az ABC derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel: $AC = 1,3$. A kérdéses emelkedési szög az AP_1C derékszögű háromszög A csúcsánál lévő α hegyesszöggel egyenlő: $\sin \alpha = \frac{0,3}{1,3}$, amiből $\alpha \approx 13,34^\circ$.

b) A kérdéses emelkedési szög az H_1TQ_1 derékszögű háromszög H_1 csúcsánál lévő β hegyesszöggel egyenlő. A $H_1H_2Q_1$ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétellel $H_1Q_1 = \sqrt{0,4^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,41}$. Ekkor a H_1TQ_1 derékszögű háromszögben $\sin \beta = \frac{0,3}{\sqrt{0,41}}$, amiből $\beta \approx 27,94^\circ$. A H_2Q_2 harmadolópontokat összekötő szakasz emelkedési szögére ugyanez adódik.

Vagyis $14,6^\circ$ -kal nagyobb lesz a szög.

c) A hajlásszöget meghatározhatjuk például koszinusztétellel. Mivel a hangya második útja az elsőhöz képest kétféle lehet, azért a b) részhez hasonlóan két esetet kell néznünk. Tudjuk, hogy

$$AK = \frac{AC}{2} = \frac{1,3}{2} = 0,65, \quad \text{és} \quad H_1K = H_2K = \frac{H_1Q_1}{2} = \frac{\sqrt{0,41}}{2} = \sqrt{0,1025}.$$

I. eset: Az AKH_1 háromszög K csúcsánál lévő γ szög a keresett hajlásszögre az egyik lehetőség. Felírjuk az AKH_1 háromszög K csúcsánál lévő γ szögére a koszinusztételt:

$$0,4^2 = 0,65^2 + (\sqrt{0,1025})^2 - 2 \cdot 0,65 \cdot \sqrt{0,1025} \cdot \cos \gamma.$$

Ebből: $\cos \gamma \approx 0,8770$, azaz $\gamma \approx 28,72^\circ$.

II. eset: Az AKH_2 háromszög K csúcsánál lévő δ szög a keresett hajlásszögre a másik lehetőség (vagy a kiegészítő szöge, ha δ tompaszög). Felírjuk az AKH_2 háromszög K csúcsánál lévő δ szögre is a koszinusztételt:

$$0,8^2 = 0,65^2 + (\sqrt{0,1025})^2 - 2 \cdot 0,65 \cdot \sqrt{0,1025} \cdot \cos \delta.$$

Ebből: $\cos \delta \approx -0,2763$, azaz $\delta \approx 106,04^\circ$, aminek a kiegészítő szöge $180^\circ - \delta \approx 73,96^\circ$.

A két útvonal hajlásszöge kerekítve: vagy $28,72^\circ$, vagy $73,96^\circ$.

7. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x - 8 - \frac{560}{x - 32} = 19 \cdot \sqrt{\frac{x - 8}{x - 32}}. \quad (16 \text{ pont})$$

Megoldás. Meghatározzuk a feladat értelmezési tartományát: $\frac{x - 8}{x - 32} \geq 0$, azaz $x \in]-\infty; 8] \cup]32; \infty]$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(x - 32)$ -vel, és rendezzük ez egyenletet:

$$(x - 8)(x - 32) - 19(x - 32)\sqrt{\frac{x - 8}{x - 32}} - 560 = 0.$$

I. eset: Ha $x \in]-\infty; 8]$, akkor $x - 32 < 0$, ezért az egyenlet így írható:

$$(x - 8)(x - 32) + 19\sqrt{(x - 8)(x - 32)} - 560 = 0.$$

Ez másodfokú egyenlet $\sqrt{(x - 8)(x - 32)}$ -re nézve.

$$\begin{aligned} (\sqrt{(x - 8)(x - 32)})_1 &= \frac{-19 + \sqrt{19^2 + 4 \cdot 560}}{2} = \frac{-19 + 51}{2} = 16, \\ (\sqrt{(x - 8)(x - 32)})_2 &= \frac{-19 - \sqrt{19^2 + 4 \cdot 560}}{2} = \frac{-19 - 51}{2} = -35. \end{aligned}$$

Csak a pozitív megoldás jöhet szóba:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - 8)(x - 32)} &= 16, \\ (x - 8)(x - 32) &= 256, \\ x^2 - 40x &= 0, \\ x_1 = 0, \quad x_2 &= 40. \end{aligned}$$

A vizsgált intervallumba csak az $x_1 = 0$ esik.

II. eset: Ha $x \in]32; \infty]$, akkor $x - 32 > 0$, ezért az egyenlet így írható:

$$(x - 8)(x - 32) - 19\sqrt{(x - 8)(x - 32)} - 560 = 0.$$

Ez is másodfokú egyenlet $\sqrt{(x - 8)(x - 32)}$ -re nézve.

$$\begin{aligned} (\sqrt{(x - 8)(x - 32)})_3 &= \frac{19 + \sqrt{19^2 + 4 \cdot 560}}{2} = \frac{19 + 51}{2} = 35, \\ (\sqrt{(x - 8)(x - 32)})_4 &= \frac{19 - \sqrt{19^2 + 4 \cdot 560}}{2} = \frac{19 - 51}{2} = -16. \end{aligned}$$

Most is csak a pozitív megoldás jöhet szóba:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - 8)(x - 32)} &= 35, \\ (x - 8)(x - 32) &= 1225, \\ x^2 - 40x - 969 &= 0, \\ x_3 = 57, \quad x_4 &= -17. \end{aligned}$$

A vizsgált intervallumba csak az $x_3 = 57$ esik.

Az egyenlet két megoldása az x_1 és az x_3 . (Ellenőrzéssel látható, hogy jól számoltunk, ezek valóban megoldásai az egyenletnek.)

8. Az $A(1; 2)$, $B(12; 4)$ és $C(4; 8)$ csúcsokkal megadott háromszögnek adjuk meg a
- súlypontját;
 - legnagyobb szögét;
 - $CP^2 + CQ^2$ értékét, ahol a P pont a C csúcsból induló belső, a Q pont pedig a C csúcsból induló külső szögfelező és az AB oldalegyenes metszéspontja. (16 pont)

Megoldás. a) Ismert, hogy a súlypont koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepével egyenlő: $S(\frac{1+12+4}{3}; \frac{2+4+8}{3})$, azaz $S(\frac{17}{3}; \frac{14}{3})$.

- b) Két pont távolsága meghatározható a pontok koordinátáinak ismeretében:

$$AB = \sqrt{(12-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{125};$$

$$BC = \sqrt{(12-4)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{80};$$

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{45}.$$

Láthatóan: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, így a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a C csúcsnál derékszög van. Vagyis a háromszög legnagyobb szöge 90° .

- c) Alkalmazzuk a belső szögfelező osztásarányára vonatkozó tételt: $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}$. Az oldalhosszak ismeretében:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{80}} = \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{4}.$$

Legyen $AP = 3x$, $BP = 4x$. Ezek alapján: $3x + 4x = \sqrt{125}$, amiből $x = \frac{\sqrt{125}}{7}$. Tehát

$$AP = 3 \cdot \frac{\sqrt{125}}{7} = \frac{15 \cdot \sqrt{5}}{7}.$$

Alkalmazzuk a külső szögfelező osztásarányára vonatkozó tételt: $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AC}{BC}$. Már tudjuk az oldalhosszak ismeretében: $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$.

Legyen $AQ = 3y$, $BQ = 4y$. Ezek alapján: $4y - 3y = \sqrt{125}$, amiből $y = \sqrt{125}$. Tehát $AQ = 3 \cdot \sqrt{125} = 15 \cdot \sqrt{5}$. Megadható PQ a két szakasz hosszával:

$$PQ = AP + AQ = \frac{15 \cdot \sqrt{5}}{7} + 15 \cdot \sqrt{5} = \frac{120}{7} \cdot \sqrt{5}.$$

Mivel PQ az átfogója az PCQ derékszögű háromszögnek (a belső és a külső szög mindig merőleges egymásra), azért $CP^2 + CQ^2 = PQ^2$. Ezek alapján a kérdéses négyzetösszeg:

$$\left(\frac{120}{7} \cdot \sqrt{5}\right)^2 = \frac{120^2 \cdot 5}{49} \approx 1469,39.$$

9. Határozzuk meg a következő határozott integrálok értékét:

a) $\int_{-1}^4 (x^2 - 2x + 2) dx;$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos x) dx;$

c) $\int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx;$

d) $\int_0^1 (2x + 1)^4 dx.$

Megoldás.

a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 (x^2 - 2x + 2) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^4 = \\ &= \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot \frac{4^2}{2} + 2 \cdot 4 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2 \cdot \frac{(-1)^2}{2} - 2 \right) = \frac{50}{3}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} + \sin x \right]_{-\pi}^{\pi} = \left(\frac{\pi^2}{2} + \sin \pi \right) - \left(\frac{(-\pi)^2}{2} + \sin(-\pi) \right) = \\ &= \sin \pi - \sin(-\pi) = 0.\end{aligned}$$

c)

$$\int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x} \right) dx = [e^x - \ln |x|]_1^2 = (e^2 - \ln 2) - (e - \ln 1) = e^2 - e - \ln 2.$$

d)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x + 1)^4 dx &= \int_0^1 (16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1) dx = \\ &= \left[16 \cdot \frac{x^5}{5} + 32 \cdot \frac{x^4}{4} + 24 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 \\ &= \frac{16}{5} + 8 + 8 + 4 + 1 = \frac{121}{5}.\end{aligned}$$