

Emelt szintű gyakorló feladatsor

Számadó László

I. rész

1. Az iskolai sakkbajnokságon mindenki pontosan egyszer játszott mindenkiel. Amikor 42 partit lejátszottak, akkor még mindenkinek négy volt hátra. Hányan szerepeltek ezen a bajnokságon? (11 pont)

2. Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) az

$$f(x) = |x + 2| + |x - 1|$$

hozzárendeléssel megadottat a $[-2; 1]$ intervallumon;

b) a

$$g(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \sin x \cos x$$

hozzárendeléssel megadottat a $[-\pi; \pi]$ intervallumon;

c) a

$$h(x) = \log_{2013} x \cdot \log_x 2014 \cdot \log_{2014} 2013$$

hozzárendeléssel megadottat a $]0; 3]$ intervallumon.

(13 pont)

3. Oldjuk meg az egyenletet, ahol n tetszőleges, 1-nél nagyobb, pozitív egész szám:

$$\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \dots + \sqrt{x^2 + nx - (n + 1)} = 0. \quad (13 \text{ pont})$$

4. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkedik az $A(-7; 5)$ pont, továbbá az $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 17$ egyenletű kört az $E(-2; 2)$ pontban érinti.

(14 pont)

II. rész

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapja 26 cm, a szárai 85 cm hosszúak. Legyen az AB alap felezőpontja F , a beírt körének a középpontja K , a köré írt körének a középpontja O , a súlypontja S , a magasságpontja M .

a) Mekkora az ASO háromszög kerülete?

b) Milyen hosszú az FK szakasz?

c) Mekkora az MF szakasz hossza, és mekkora szögben látszik az AC szár az M pontból?

(16 pont)

6. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\left. \begin{aligned} 3^{3x-1} &= 2y^3 - 11y - 693 \\ x &= \log_3(y + 1) \end{aligned} \right\}. \quad (16 \text{ pont})$$

7. a) Határozzuk meg az

$$f(x) = x^2 - 10x + 27$$

függvény integrálját a $[3; 6]$ intervallumon.

b) Mennyivel kell a megadott intervallumot eltolni, hogy az integrál 18 legyen?

(16 pont)

8. Adott a következő számsokaság: 1, 1, 2, 4, 8, 8, 8, 9, 13.

a) Igazoljuk a fenti számsokaság esetén, hogy a számtani közepénél kisebb számok tőle számított távolságainak az összeg ugyanakkora, mint a nála nagyobb számok tőle számított távolságainak az összege.

b) Adjuk meg a fenti számsokasághoz azt a középértéket, amelyhez a számadatok tőle számított abszolút távolságainak összege minimális.

c) Adjuk meg a fenti számsokasághoz azt a középértéket, amelyhez a számadatok tőle számított távolságainak négyzetösszege minimális.

(16 pont)

9. Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelyre a

$$\frac{4 \sin^2 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 1}{\sin^2 x}$$

kifejezés minimális. Mennyi ez a legkisebb érték?

(16 pont)