

# Megoldásvázlatok a 2013/2. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Ratkó Éva és Schmieder László

Budapest

## I. rész

1. Hány olyan különböző téglatest van, amelyre teljesül, hogy élleinek hossza egész szám, térfogata 15 000 egység, és a három él hosszának legnagyobb közös osztója 5?

(12 pont)

**Megoldás.** Az élek hosszának legnagyobb közös osztója 5. Vagyis a három él hossza  $5a$ ,  $5b$  és  $5c$ , ahol  $(a, b, c) = 1$ . Mivel  $\frac{15\,000}{5^3} = 120$ , azért  $abc = 120$ . Tehát az a kérdés, hogy hány olyan  $a$ ,  $b$ ,  $c$  pozitív egész szám van, amelyek legnagyobb közös osztója 1, szorzata 120, és mivel a számok sorrendjétől eltekintünk, azért  $a \leq b \leq c$ .

Tudjuk, hogy  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ .

Ha  $a = 1$ , akkor  $bc = 120$ , és mivel 120 osztóinak száma  $d(120) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ , és 120 nem négyzetszám, azért ekkor  $\frac{16}{2} = 8$  megfelelő számhármass van.

Ha  $a = 2$ , akkor  $bc = 60$ , és már csak a  $b, c \geq 2$ ,  $b \leq c$  eseteket keressük. Ha  $b$  és  $c$  is osztható lenne 2-vel, akkor  $(a, b, c) = 2$  lenne. Tehát csak az egyikük osztható 2-vel, sőt, ezek szerint 4-gyel. Tehát az egyik lehetőség, hogy  $b = 2^2 \cdot b'$  és ekkor  $b'c = 15$ . Ez csak úgy lehet, ha  $b = 4$  és  $c = 15$ . A másik lehetőség, hogy  $c = 4 \cdot c'$ , ekkor  $b = 3$ ,  $c = 20$  vagy  $b = 5$  és  $c = 12$ . Tehát 3 ilyen megfelelő számhármass van.

Ha  $a = 3$ , akkor  $bc = 40 = 2^3 \cdot 5$ ,  $b, c \geq 4$ ,  $b \leq c$ . Ekkor  $b = 4$ ,  $c = 10$  vagy  $b = 5$ ,  $c = 8$ .

Ha  $a = 4$ , akkor az egyetlen megoldás  $b = 5$  és  $c = 6$ .

Több lehetőség nincs, hiszen  $5^3 > 120$ .

Tehát összesen  $8 + 3 + 2 + 1 = 14$  megfelelő téglatest van.

2. Oldjuk meg az következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a)  $\sqrt{x} - \sqrt{x+2} = 2$ ;

b)  $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \log_{16} x^3$ .

(13 pont)

**Megoldás.** a) Az egyenlet alaphalmaz az  $x \geq \sqrt{x+2}$  és az  $x+2 \geq 0$  egyenlőtlenségekből számítható. Az elsőből egyrészt  $x \geq 0$ , másrészt  $x^2 - x - 2 \geq 0$  adódik, azaz  $x \in [2; +\infty[$ . A második egyenlőtlenség megoldása  $x \in [-2; +\infty[$ . Az alaphalmaz tehát a  $[2; +\infty[$  intervallum.

A megoldáshoz emeljük négyzetre és rendezzük az egyenletet:

$$x - \sqrt{x+2} = 4,$$

$$x - 4 = \sqrt{x+2}.$$

Látható, hogy csak  $x \geq 4$  esetén lehet megoldást találni. Újabb négyzetre emelés és rendezés után

$$x^2 - 9x + 14 = 0,$$

amiből  $x_1 = 7$  és  $x_2 = 2$ . Mivel a második gyök kisebb 4-nél, azért nem megoldás. A 7 benne van az alaphalmazban, és ellenőrzéssel meggyőződhetünk a helyességéről, így az egyenlet egyetlen megoldása  $x_1 = 7$ .

b) Az egyenlet alaphalmaz a pozitív valós számok halmaza. Hozzuk közös, 2-es alapra a logaritmusokat:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = \frac{\log_2 x^3}{\log_2 16}.$$

A nevezők kiszámítása és a logaritmus argumentumában lévő hatványra vonatkozó azonosság alapján a

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} + \frac{\log_2 x}{3} = \frac{3 \cdot \log_2 x}{4}$$

egyenletet kapjuk. Rendezve:

$$12 \log_2 x + 6 \log_2 x + 4 \log_2 x = 9 \log_2 x,$$

$$22 \log_2 x = 9 \log_2 x,$$

azaz  $13 \log_2 x = 0$ . Mivel az  $x \mapsto \log_2 x$  függvény szigorúan monoton nő, és  $x = 1$ -nél értéke zérus, azért az  $x = 1$  a kapott egyenlet egyetlen megoldása.

Mivel az 1 benne van az eredeti egyenlet alaphalmazában, és végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, azért az eredeti egyenlet megoldása:  $x = 1$ .

**3.** Családunk szokásait megfigyelve annak a valószínűsége, hogy egy nyári délután sétálni megyünk 0,6. Ha otthon maradunk, akkor 0,25 annak a valószínűsége, hogy fagyizunk. Annak a valószínűsége, hogy fagyizunk 0,2. Mennyi egy nyári délután annak a valószínűsége, hogy

- otthon maradunk és fagyizunk;
- sétálunk és fagyizunk;
- fagyizunk, ha sétálni megyünk?

(13 pont)

**Megoldás.** Jelölje  $S$  azt az eseményt, hogy sétálni megyünk,  $F$  pedig azt az eseményt, hogy fagyizunk. Ekkor nyilván  $\overline{S}$  = otthon maradunk és  $\overline{F}$  = nem fagyizunk.

a) A feladat szövege szerint a következő valószínűségeket tudjuk:  $P(S) = 0,6$ ,  $P(F|\overline{S}) = 0,25$ ,  $P(F) = 0,2$ . Ezekből  $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 0,4$  és  $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 0,8$ .

A feltételes valószínűség definíciója alapján  $P(F|\overline{S}) = \frac{P(F\overline{S})}{P(\overline{S})}$ , amiből  $P(F\overline{S}) = 0,25 \cdot 0,4 = 0,1$ .

Annak a valószínűsége, hogy otthon maradunk és fagyizunk 0,1.

b) Mivel  $P(F) = P(F\overline{S}) + P(FS)$ , azért  $P(FS) = 0,2 - 0,1$ , azaz annak a valószínűsége, hogy sétálunk és fagyizunk 0,1.

c)

$$P(F|S) = \frac{P(FS)}{P(S)} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}.$$

**4.** Adott az  $f: x \mapsto x^3$  függvény. a) Adjuk meg az  $f$  függvénygörbe azon érintőinek egyenletét, amelyek meredeksége 12.

b) Számítsuk ki az érintési pontok egymástól való távolságát.

c) Állapítsuk meg, hogy milyen távol vannak egymástól az érintők.

(13 pont)

**Megoldás.** a)  $f' = 3x^2$ , mely akkor lesz 12, ha  $x = \pm 2$ . Az érintési pontok tehát  $E_1(-2; (-2)^3)$  és  $E_2(2; 2^3)$ , vagyis  $E_1(-2; -8)$  és  $E_2(2; 8)$ .

Az érintők egyenlete  $e_1: y = 12x + 16$  és  $e_2: y = 12x - 16$ .

b) A két pont távolsága:  $d(E_1E_2) = \sqrt{4^2 + 16^2} = 4\sqrt{17}$ .

c) Mivel a feladatban szereplő függvénygörbe páratlan fokszámú origón átmenő polinom, azért szimmetrikus az origóra. Ebből következik, hogy a két adott meredekségű érintője is szimmetrikus az origóra. A két egyenes távolsága ezért számolható úgy, hogy az egyik egyenes és az origó távolságát megduplázzuk. Írjuk föl tehát az egyenesekre merőleges, origón átmenő egyenest:  $y = -\frac{1}{12}x$ . Ennek és  $e_1$ -nek metszéspontja  $P(-\frac{192}{145}; \frac{16}{145})$ . Tehát a keresett távolság:

$$d = 2\overline{PO} = 2\sqrt{\left(-\frac{192}{145}\right)^2 + \left(\frac{16}{145}\right)^2} = \frac{\sqrt{148480}}{145} \approx 2,6575.$$

**Megjegyzés:** A c) résznél pont és egyenes távolságának képletével gyorsabban is célhoz érhetünk. Ehhez  $e_1$  egyenletét írjuk a következő alakba:  $0 = 12x - y + 16$ . A két érintő távolsága megegyezik  $E_2(2; 8)$  és  $e_1$  távolságával.

$$d = \left| \frac{12 \cdot 2 - 1 \cdot 8 + 16}{\sqrt{12^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{32}{\sqrt{145}} \approx 2,6575.$$

## II. rész

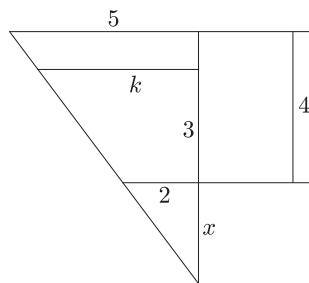
**5.** Egy golyót beletettünk egy olyan edénybe, amelynek a belső része csonkakúp alakú, és 3 cm magasságig volt vízzel töltve. Miután a golyót behelyeztük, a víz éppen nem folyt ki az edényből. A csonkakúp alapkörének és fedőkörének sugara rendre 2, illetve 5 cm, magassága pedig 4 cm. Mekkora a golyó sugara, ha magasságának  $\frac{2}{3}$  részéig merül bele a vízbe?

(16 pont)

**Megoldás.** Tekintsük az ábrát. A hasonlóság miatt egyrészt  $\frac{2}{5} = \frac{x}{x+4}$ , amiből  $x = \frac{8}{3}$  cm. Másrészt  $\frac{2}{k} = \frac{x}{x+3}$ , ahonnan  $k = 4,25$  cm.

Az 1 cm magasságú, 5 cm, illetve 4,25 cm alapkörű csonkakúp térfogata

$$V_{\text{csk}} = \frac{\pi}{3} \cdot [1 \cdot (5^2 + 4,25^2 + 5 \cdot 4,25)] = \frac{64,3125\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Ez a térfogat egyenlő egy olyan gömbszelet térfogatával, melynek sugara a keresett  $r$  sugár, magassága pedig  $m = \frac{2}{3} \cdot 2r = \frac{4}{3}r$ , mivel a golyó a magassága  $\frac{3}{4}$  részéig merül a vízbe.

$$V_{\text{gsz}} = \frac{\pi}{3} m^2 (3r - m) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}r\right)^2 \cdot \left(3r - \frac{4}{3}r\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{80}{27} \cdot r^3 = \frac{64,3125\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)},$$

amiből  $r \approx 2,7895$  cm. Tehát a golyó sugara 2,7895 cm.

**6.** Az Újpesti Fa- és Fémipari Szakiskola új épületében 1927-ben kezdődött meg a tanítás. Az iskola egy ötszögű telekre épült, melyről a helytörténeti újság a következőket írja: „A Görgey út és a Szent Imre utca  $49,4^\circ$ -os szöget zár be egymással, egyenes vonalú 229 m -es és 195 m -es telekmérettel. A Corvin utcai telekhatár  $44,1^\circ$ -os szögben törik a Görgey út felé 104 m hosszon, majd homorú szögben 49 m-en északi irányt vesz és innen egy rövid szakaszon zárul a Szent Imre utcai telekhatár végpontjához.” Tudjuk még, hogy a Görgey út  $+2,9^\circ$ -os szöget zár be a K-Ny-i irányval, és a telek délnyugati sarokpontja a Görgey út és a Corvin utca kereszteződése. Számítsuk ki a telek területét. (16 pont)

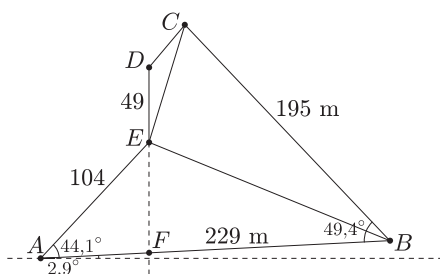
*Megjegyzés.* A feladat megfogalmazása nem volt egyértelmű. A megoldás a valódi telekkel számol. Természetesen elfogadható minden további helyes értelmezés.

**Megoldás.** Használjuk az *ábra* jelöléseit. Tekintsünk először az  $ABE$  háromszöget. Írjuk fel rá a koszinusztételt:

$$EB^2 = 104^2 + 229^2 - 2 \cdot 104 \cdot 229 \cdot \cos 44,1^\circ,$$

amiből  $EB \approx 170,44$  m. Ugyanebben a háromszögben a szinusztételt felírva:

$$\frac{\sin \angle ABE}{\sin 44,1^\circ} = \frac{104}{170,44}.$$



Mivel  $\angle ABE < 49,4^\circ$ , azért ebből  $\angle ABE \approx 25,13^\circ$  következik.

Az  $EBC$  háromszögben  $\angle CBE = \angle ABC - \angle ABE \approx 24,27^\circ$ . A koszinusztételt felírva:

$$EC^2 = 170,44^2 + 195^2 - 2 \cdot 170,44 \cdot 195 \cdot \cos 24,27^\circ,$$

amiből  $EC \approx 80,49$  m. Írjuk fel a koszinusztételt az  $EBC$  háromszögre:

$$195^2 = 80,49^2 + 170,44^2 - 2 \cdot 80,49 \cdot 170,44 \cdot \cos \angle CEB.$$

Ebből  $\cos \angle CEB \approx -0,09099$ , és így  $\angle CEB \approx 95,22^\circ$ .

Mivel  $\angle EFB = 90^\circ - 2,9^\circ = 87,1^\circ$ , azért  $\angle BEF \approx 180^\circ - 25,13^\circ - 87,1^\circ = 67,77^\circ$ . Innen  $\angle CED = 180^\circ - \angle BEF - \angle CEB \approx 17,01^\circ$ .

A telek területe:

$$\begin{aligned} T &= t_{ABE} + t_{EBC} + t_{ECD} = \\ &= \frac{1}{2} (104 \cdot 229 \cdot \sin 44,1^\circ + 195 \cdot 170,44 \cdot \sin 24,27^\circ + 49 \cdot 80,49 \cdot \sin 17,01^\circ) \approx \\ &\approx 15694,39 \text{ (m}^2\text{)}. \end{aligned}$$

7. Tekintsünk egy 6 pontú teljes gráfot.

a) Hány 3, 4, 5, illetve 6 csúcsot tartalmazó kör van ebben a gráfban?

b) Hány 3, 4, 5, illetve 6 csúcsot tartalmazó kör lesz benne, ha egy élet elhagyunk?

(16 pont)

**Megoldás.** a) 3 csúcsú:  $\binom{6}{3} = 20$ , mert 3 csúcshoz csak egy kör tartozik. 4 csúcsú:  $\binom{6}{4} \cdot \frac{4!}{4 \cdot 2} = 15 \cdot 3 = 45$ , mert 4 csúcs esetén 4!-féleképp választhatjuk ki a csúcsok sorrendjét, de mindegy, hogy melyik csúcs az első (osztunk 4-gyel), illetve a csúcsok egy adott sorrendje esetén a fordított sorrend ugyanazt a kört adja (osztunk 2-vel).

Hasonló gondolatmenettel az 5 csúcsú körök száma  $\binom{6}{5} \cdot \frac{5!}{5 \cdot 2} = 6 \cdot 12 = 72$ , a 6 csúcsúaké pedig  $\binom{6}{6} \cdot \frac{6!}{6 \cdot 2} = 1 \cdot 60 = 60$ .

b) Nézzük meg, hogy hány körrel lesz kevesebb az él elhagyása miatt az egyes esetekben. Azokat a köröket hagytuk el, amelyeknek az egyik éle a kiválasztott él, a többi csúcs pedig a másik négy csúcsból volt kiválasztva. 3 csúcs esetén: a maradék 4 csúcsból kell választani 1-et, ez  $\binom{4}{1} = 4$  lehetőség. 4 csúcs esetén:  $\binom{4}{2} \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$  kör, mivel az adott él egyik csúcsát kiválasztva, ahhoz 2 csúcsot választhatunk stb. 5 csúcs esetén:  $\binom{4}{3} \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$  kör, 6 csúcs esetén pedig  $\binom{4}{4} \cdot 4! = 1 \cdot 24 = 24$  kör. Tehát a körök száma rendre  $20 - 4 = 16$ ,  $45 - 12 = 33$ ,  $72 - 24 = 48$  és  $60 - 24 = 36$ .

8. Egy szabályos, két egység oldalú  $n$ -szög ( $n \geq 3$ ) mindegyik csúcsa, mint középpont köré egység sugarú kört írunk.

a) Adjuk meg  $n$  függvényében annak a körnek az  $r_n$  sugarát, amely a sokszög csúcsába írt körök mindegyikét érinti a sokszög belsejében.

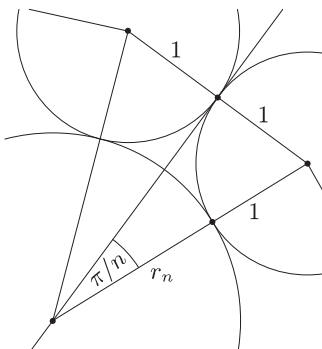
b) Milyen  $n$  értékekre lesz  $r_n$  értéke 2013-nál nagyobb?

(16 pont)

**Megoldás.** A kör középpontját a sokszög csúcsával összekötő szakasz hossza egyenlő a két kör sugarának összegével, vagyis  $(r_n + 1)$ -gyel.

$r_n =$

a) Az ábrán látható derékszögű háromszögből  $\frac{1}{r_n + 1} = \sin \frac{\pi}{n}$ , ahonnan



b)

$$r_n = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} - 1 > 2013,$$

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} > 2014,$$

$$\sin \frac{\pi}{n} < \frac{1}{2014}.$$

Mivel  $\frac{\pi}{n} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$ , azért

$$\frac{\pi}{n} < 0,000\,496\,52,$$

$$n > \frac{\pi}{0,000\,496\,52} \approx 6327,22.$$

Tehát  $n \geq 6328$  esetén lesz  $r_n$  értéke 2013-nál nagyobb.

**9.** Egy bergengóc egyetemi hallgató tanulmányai 3 évében diákhitelt vett föl. Az első tanév szeptemberétől minden hónap első napján 25 000 Ft-ot kapott. A kamatszámítás havonta történik időarányos (lineáris) kamatszámítás szerint, vagyis a bank a havi kamat összegét a  $\frac{t \cdot k}{12}$  képlet alapján számítja ki, ahol  $t$  a tőketartozás, és  $k$  az aktuális éves kamatláb. A tárgyévben meg nem fizetett kamat tőkésítésére évente, december 31-i értéknappal kerül sor. Tegyük föl, hogy a hitel felvétele és visszafizetése alatt a kamatláb végig 9%.

a) Mekkora a végzett diák tőketartozása a tanulmányok befejezését követő hónap (július) első napján?

b) A diák a tanulmányok befejezését követő szeptember első napjától a tartozás teljes kiegyenlítéséig minden hónapban 25 000 Ft-tal (illetve az utolsó hónapban a fennmaradó összeggel) törleszti felvett hitelét. A havonta törlesztett összeg először csak a felgyűlt kamatokat csökkenti, majd azok elfogyása után minden hónapban a tőketartozást is. Hány hónapig tart így a teljes hitel visszafizetése? (16 pont)

**Megoldás.** a) Az első naptári év utolsó napján a tőketartozás 100 000 Ft. Az ezen időszakban felgyűlt kamat

$$(4 + 3 + 2 + 1) \cdot \frac{0,09}{12} \cdot 25\,000 = 1875 \text{ Ft.}$$

A következő naptári évben a tőketartozás 101 875 Ft-ról indul, az év utolsó napján 300 000 Ft-tal több, tehát 401 875 Ft. Az ebben az évben felszámolt kamat

$$(12 + 11 + \dots + 1) \cdot \frac{0,09}{12} \cdot 25\,000 + 101\,875 \cdot 0,09 = 23\,794 \text{ Ft.}$$

A harmadik naptári év elején a tőketartozás 425 669 Ft, év végén pedig 725 669 Ft. Az ebben az évben felgyűlt kamat 52 935 Ft.

A negyedik naptári év elején a tőketartozás 778 604 Ft, július első napján pedig 928 604 Ft.

b) A negyedik naptári év első félévében felgyűlt kamat 38 975 Ft. A következő két hónapban ehhez még hozzájön 13 939 Ft kamat, ami így összesen 52 904 Ft.

A következő három hónapban a kamat mindig 6965 Ft, a törlesztés pedig 25 000 Ft. Így november végére az addig felgyűlt kamatot kifizeti és még a tőketartozásból is törleszt 1202 Ft-ot.

December 1-jén a tőketartozás 927 402 Ft. Ezután minden hónapban kifizeti a kamatot és a tőketartozásból is törleszt.  $n$  hónap eltelte után a tőketartozás:

$$\left( \dots \left\{ \left[ 927\,402 \cdot \left( 1 + \frac{0,09}{12} \right) - 25\,000 \right] \cdot \left( 1 + \frac{0,09}{12} \right) - 25\,000 \right\} \dots \right).$$

Akkor fizeti vissza a diák a kölcsönt, ha ez az érték nem pozitív. Ebből a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$927\,402 \cdot 1,0075^n - 25\,000 \cdot (1,0075^{n-1} + 1,0075^{n-2} + \dots + 1,0075 + 1) \leq 0.$$

Ebből a mértani sorozat összegképletének felhasználásával:

$$927\,402 \cdot 1,0075^n - 25\,000 \cdot \frac{1,0075^n - 1}{1,0075 - 1} \leq 0,$$

$$0,278\,220\,6 \cdot 1,0075^n - (1,0075^n - 1) \leq 0,$$

$$-0,727\,794 \cdot 1,0075^n + 1 \leq 0,$$

$$1,3740 \leq 1,0075^n,$$

$$\lg 1,3740 \leq n \lg 1,0075,$$

$$42,522 \leq n.$$

Tehát  $3 + 42 = 45$  hónapig kell 25 000 Ft-ot fizetni, az utolsó hónapban ennél kevesebbet, vagyis 46 hónap a teljes visszafizetés ideje.