

Emelt szintű gyakorló feladatsor

Számadó László

I. rész

1. Egy (pozitív számokat tartalmazó) mértani sorozat szomszédos elemeinek különbségét sorban egymás mellé írtuk. Igazoljuk, hogy az így kapott sorozat is mértani sorozat, ahol $q \neq 1$. Adjuk meg az így kapott mértani sorozat első elemét és hányadosát. (11 pont)

2. a) Réka környezetbarát mosógélt árusít 3 literes kiszerelesben. Negyvenöt darab színes cédulát tett egy kis kosárba. Ezen cédulák közül tizenhét „egy ajándék”, tizenöt „két ajándék”, és tizenkettő „három ajándék” szöveget tartalmaz. A vásárlók egy cédulát húznak a vásárlás előtt, és a rajta levő szövegek alapján ajándékot kapnak a következő sorrendben: 810 Ft-os univerzális tisztítószert, 510 Ft-os textilöblítőt, 290 Ft-os mosogatószert. Ezután a cédulát visszateszik a kosárba.

Vásárlás előtt László is húz egy cédulát. Mekkora valószínűséggel fog három ajándékot kapni?

Mennyi legyen a mosógél literjének ára, ha a forgalmazó cég átlagosan 535 Ft-os bevételt szeretne literenként kapni?

b) Elfelejtettük a telefon bekapcsolásához szükséges négyjegyű kódot. Csak azt tudjuk, hogy négy egymást követő pozitív számjegyből állt, de nem növekedő, és nem csökkenő sorrendben követik egymást a számjegyek. Hány ilyen négyjegyű szám van? (13 pont)

3. A 6 egység oldalhosszúságú, vízszintes síkban elhelyezkedő $ABCDEF$ szabályos hatszög minden csúcsában, a hatszög síkjára merőlegesen, a síknak ugyanazon az oldalán áll egy-egy szakasz. Ezeknek a szakaszoknak a hossza:

$$AA' = 2, \quad BB' = \frac{9}{2}, \quad CC' = 7, \quad DD' = \frac{19}{2}, \quad EE' = 12, \quad FF' = \frac{29}{2}.$$

a) Milyen hosszú az $A'B'C'D'E'F'$ töröttvonal?

b) Határozzuk meg az $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$ azon pontpárjait, amelyek pontosan egymás fölött helyezkednek el, majd határozzuk meg az ezen pontpárok közötti távolságokat. (13 pont)

4. Tekintsük a következő, általános tagjával adott sorozatot:

$$a_n = a \cdot n^2 + (2a + b) \cdot n - (b^2 - b - a).$$

Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok, akkor a sorozat bármely öt egymást követő tagjának összege osztható 5-tel. (14 pont)

II. rész

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $2^{3x} - 2^{2x} - 2^{x+1} = 0$;

b) $\sin 3x - \sin 2x - \sin x = 0$. (16 pont)

6. Egy 0,5 méter széles és 1,2 méter hosszú bútorlap hosszabb éle a vízszintes talajra illeszkedik, a vele párhuzamos él pedig 30 cm magasságban helyezkedik el.

a) Mennyi az emelkedési szöge a bútorlap egyik átlóján felfelé haladó hangyának?

b) Mennyit változik ez a szög, ha az alsó él egyik harmadolópontjából a felső él nem szemközti harmadolópontjába igyekszik ez a hangya?

c) Határozzuk meg a két útvonal hajlásszögét. (16 pont)

7. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x - 8 - \frac{560}{x - 32} = 19 \cdot \sqrt{\frac{x - 8}{x - 32}}. \quad (16 \text{ pont})$$

8. Az $A(1; 2)$, $B(12; 4)$ és $C(4; 8)$ csúcsokkal megadott háromszögnek adjuk meg a
- súlypontját;
 - legnagyobb szögét;
 - $CP^2 + CQ^2$ értékét, ahol a P pont a C csúcsból induló belső, a Q pont pedig a C csúcsból induló külső szögfelező és az AB oldalegyenes metszéspontja.

(16 pont)

9. Határozzuk meg a következő határozott integrálok értékét:

a) $\int_{-1}^4 (x^2 - 2x + 2) dx;$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos x) dx;$

c) $\int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x} \right) dx;$

d) $\int_0^1 (2x + 1)^4 dx.$

(16 pont)