

I. rész

1. Egy r sugarú körbe írt ABC háromszögben $AB = r$ és $AC = r\sqrt{3}$. Mekkora a BC oldal? (11 pont)

Megoldás. Az r sugarú kör középpontja legyen a K pont, a keresett BC oldal hossza pedig x . Tudjuk, hogy az AKB háromszög szabályos, vagyis az AB (kisebbik) ívhez tartozó AKB középponti szög 60 fokos. Ezért az ABC háromszög C csúcsánál található belső szög 30 fokos, hiszen ez az előbbi ívhez tartozó egyik kerületi szög.

Írjuk fel az ABC háromszögre a koszinusztételt:

$$r^2 = x^2 + (r\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot r \cdot x \cdot \cos 30^\circ,$$

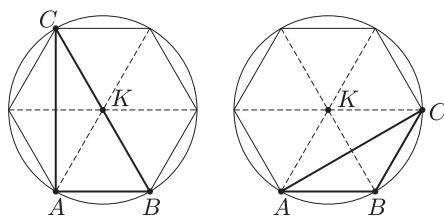
$$r^2 = x^2 + 3r^2 - 2\sqrt{3} \cdot r \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$0 = x^2 - 3rx + 2r^2.$$

Oldjuk meg ezt az x -re másodfokú egyenletet:

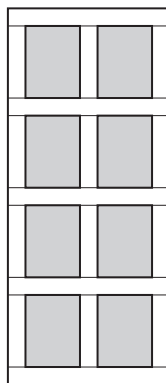
$$x_{1;2} = \frac{3r \pm \sqrt{9r^2 - 8r^2}}{2} = \frac{3r \pm r}{2}.$$

Vagyis $x_1 = 2r$, $x_2 = r$.



A BC oldal lehetséges hossza: $2r$ vagy r .

2. Egy 90 cm széles és 210 cm magas, kazettás ajtó vázlatát mutatja az ábra.



A nyolc egyforma téglalap alakú kazetta pontosan az ajtó lapjának a felét teszi ki. A kazetták közötti és melletti sávok szélessége mindenütt ugyanannyi. Mekkora ez a szélesség? (13 pont)

Megoldás. A sávok szélessége legyen x . A rajzon látható darabolás segítségével felírjuk a kazettákon kívüli rész területét, ami az ajtólap területének felével egyenlő:

$$5 \cdot 90 \cdot x + 3 \cdot x \cdot (210 - 5 \cdot x) = 9450,$$

$$450x + 630x - 15x^2 = 9450,$$

$$x^2 - 72x + 630 = 0.$$

Megoldóképlettel a gyökök:

$$x_{1;2} = \frac{72 \pm \sqrt{2664}}{2}, \quad \text{azaz} \quad x_1 \approx 10,2, \quad x_2 \approx 61,8.$$

Mivel az ajtó szélessége 90 cm, azért a sávok szélessége kisebb, mint 30 cm. Vagyis a kapott gyökök közül csak az x_1 felelhet meg.

Tehát az ajtón a kazetták körüli sávok kb. $10,2$ cm szélesek.

3. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(x - 5 - 2\sqrt{x-2})(x - 10 - 4\sqrt{x-5}) = 0. \quad (13 \text{ pont})$$

Megoldás. Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \geq 5$.

Az egyenletet a következő alakra hozhatjuk:

$$(x - 2 - 2\sqrt{x-2} - 3)(x - 5 - 4\sqrt{x-5} - 5) = 0,$$

$$[(\sqrt{x-2})^2 - 2\sqrt{x-2} - 3] \cdot [(\sqrt{x-5})^2 - 4\sqrt{x-5} - 5] = 0.$$

Az első tényező $\sqrt{x-2}$ -re, a második tényező pedig $\sqrt{x-5}$ -re másodfokú. Ezeket a másodfokúnak tekinthető tényezőket tovább bonthatjuk, így kapjuk a következő alakot:

$$(\sqrt{x-2} - 3)(\sqrt{x-2} + 1)(\sqrt{x-5} - 5)(\sqrt{x-5} + 1) = 0.$$

Egy szorzat akkor nulla, ha legalább egy tényezője nulla. A második és a negyedik tényező nem lehet 1-nél kisebb, vagyis ezek semmilyen x esetén sem lesznek nullák.

Marad két eset.

I. eset: $\sqrt{x-2} - 3 = 0$. Ekkor $x = 11$.

II. eset: $\sqrt{x-5} - 5 = 0$. Ekkor $x = 30$.

Mindkettő megoldás, mert benne van az értelmezési tartományban.

(Könnyen ellenőrizhető is a gyökök helyessége.)

4. Adott az $f:]-3; 5[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ||(x-1)^2 - 1| - 3| - 5$ függvény.

a) Adjuk meg a függvény zérushelyeit.

b) Adjuk meg azon rácpontok koordinátáját, amelyek illeszkednek a függvény grafikonjára.

c) Mely intervallumokon szigorúan monoton csökkenő a függvény?

(14 pont)

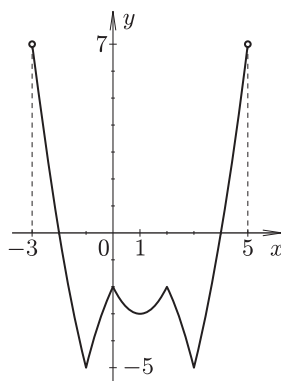
Megoldás. a) Az $|(x-1)^2 - 1| - 3| - 5 = 0$ egyenlet megoldásait keressük. Az $|(x-1)^2 - 1| - 3$ lehet -5 vagy 5 , azaz:

$$|(x-1)^2 - 1| = -2 \quad \text{vagy} \quad |(x-1)^2 - 1| = 8.$$

Természetesen az első egyenlet nem teljesülhet semmilyen valós x -re sem. Vagyis csak az $(x-1)^2 = 9$ adhat megoldást. (Az $(x-1)^2 = -7$ sem teljesülhet.)

Innen pedig: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

b) A függvény értelmezési tartományában hét egész szám található. Ezek a -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 és a 4 . Vagyis hétnél több rácpont nem illeszkedhet a függvény grafikonjára. Kiszámítjuk ezeken a helyeken a függvényértékeket. Mivel mindegyik esetben egész számot kapunk, azért a feltételeknek megfelelő rácpontok a következők: $(-2; 0)$, $(-1; -5)$, $(0; -2)$, $(1; -3)$, $(2; -2)$, $(3; -5)$ és $(4; 0)$.



c) A normálpárabola transzformálásával a függvény képe megrajzolható.

A $]-3; -1]$, $[0; 1]$ és a $[2; 3]$ intervallumokon a függvény szigorúan monoton csökkenő.

II. rész

5. Az a , b és c pozitív számjegyekről a következőket tudjuk: $a + b + c = \overline{ab}$ és $a^2 + b^2 + c^2 = \overline{b^2a}$ (ahol $\overline{ab}$ és $\overline{b^2a}$ is egy-egy kétjegyű szám). Adjuk meg ezeket a számjegyeket. (16 pont)

Megoldás. A feladat szövegéből kiderül, hogy b olyan pozitív számjegy, amelynek a négyzete is számjegy. Vagyis összesen három eset van.

I. eset: Ha $b = 3$, akkor az

$$\left. \begin{aligned} a + 3 + c &= 10a + 3 \\ a^2 + 9 + c^2 &= 90 + a \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk, amit a következő alakban is írhatunk:

$$\left. \begin{aligned} c &= 9a \\ a^2 + c^2 &= a + 81 \end{aligned} \right\}.$$

Az a olyan pozitív számjegy, amelynek a kilencszerese is számjegy. Vagyis $a = 1$, $c = 9$.

Ez valóban megoldás, mert az egyenletrendszer második egyenletét is igazgá teszi.

II. eset: Ha $b = 2$, akkor az

$$\left. \begin{aligned} a + 2 + c &= 10a + 2 \\ a^2 + 4 + c^2 &= 40 + a \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk, amit a következő alakban is írhatunk:

$$\left. \begin{aligned} c &= 9a \\ a^2 + c^2 &= a + 36 \end{aligned} \right\}.$$

Most is csak az $a = 1$, $c = 9$ adódna az első egyenletből, de ez nem megoldása a második egyenletnek.

III. eset: Ha $b = 1$, akkor az

$$\left. \begin{aligned} a + 1 + c &= 10a + 1 \\ a^2 + 1 + c^2 &= 10 + a \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk, amit így írhatunk:

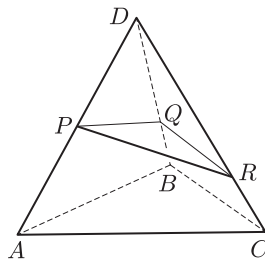
$$\left. \begin{aligned} c &= 9a \\ a^2 + c^2 &= a + 9 \end{aligned} \right\}.$$

Az előző esethez hasonlóan innen sem kapunk megfelelő számjegyeket.

A feladat egyedüli megoldása: $a = 1$, $b = 3$, $c = 9$.

6. Az $ABCD$ szabályos tetraédert egy síkkal elmetsszük. A metszősík három, egy csúcsból induló élt metsz a közös csúcstól számítva $1 : 1$, $2 : 1$ és $3 : 1$ arányban. Határozzuk meg a lemetszett tetraéder és az eredeti tetraéder felszínarányát. (16 pont)

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit. Tudjuk, hogy $DP : PA = 1 : 1$, $DQ : QB = 2 : 1$, $DR : RC = 3 : 1$. Legyen a szabályos tetraéder élhossza a , ekkor $PD = \frac{a}{2}$, $QD = \frac{2a}{3}$, $RD = \frac{3a}{4}$.



Az $ABCD$ szabályos tetraéder felszíne:

$$A_{ABCD} = a^2 \cdot \sqrt{3}.$$

A lemetszett tetraéder oldallapjainak egyik szöge 60° fokos, ezt felhasználva felírható mindhárom háromszögnek a területe:

$$\begin{aligned} t_{PQD} &= \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\frac{a^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{12} \approx 0,144 \cdot a^2, \\ t_{QRD} &= \frac{\frac{2a}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{8} \approx 0,217 \cdot a^2, \\ t_{RPD} &= \frac{\frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\frac{3a^2}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{32} \approx 0,162 \cdot a^2. \end{aligned}$$

A lemeztett tetraéder alsó lapjának minden oldalhossza koszinusztétellel meghatározható:

$$\begin{aligned}
 PQ^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{3} = \\
 &= \frac{9a^2 + 16a^2 - 12a^2}{36} = \frac{13a^2}{36}, \quad PQ = \frac{a\sqrt{13}}{6} \approx 0,601 \cdot a, \\
 QR^2 &= \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \cos 60^\circ = \frac{4a^2}{9} + \frac{9a^2}{16} - \frac{a^2}{2} = \\
 &= \frac{64a^2 + 81a^2 - 72a^2}{144} = \frac{73a^2}{144}, \quad QR = \frac{a\sqrt{73}}{12} \approx 0,712 \cdot a, \\
 RP^2 &= \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 60^\circ = \frac{9a^2}{16} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{8} = \\
 &= \frac{9a^2 + 4a^2 - 6a^2}{16} = \frac{7a^2}{16}, \quad RP = \frac{a\sqrt{7}}{4} \approx 0,661 \cdot a.
 \end{aligned}$$

A PQR háromszög területét az oldalak ismeretében a Heron-képlettel számolhatjuk ki. Ehhez szükségünk van a háromszög kerületének felére:

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{0,601a + 0,712a + 0,661a}{2} = 0,987a. \\
 t_{PQR} &= \sqrt{s(s-PQ)(s-QR)(s-RP)} = \sqrt{0,987a \cdot 0,386a \cdot 0,275a \cdot 0,326a} \approx 0,185 \cdot a^2.
 \end{aligned}$$

A lemeztett tetraéder felszínét a négy háromszög területösszege adja:

$$A_{PQRD} = 0,144a^2 + 0,217a^2 + 0,162a^2 + 0,185a^2 = 0,708a^2.$$

A felszínek keresett aránya a következő:

$$\frac{A_{PQRD}}{A_{ABCD}} = \frac{0,708 \cdot a^2}{\sqrt{3} \cdot a^2} \approx 0,41.$$

7. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

egyenletet.

(16 pont)

Megoldás. Mindkét oldalt szorozzuk meg 4-gyel, és írjuk a következő alakban az egyenletet:

$$(2 \sin^2 x)^2 + \left[2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 + \left[2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 = 6.$$

Tudjuk, hogy:

$$2 \sin^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \cos 2x.$$

Ezt felhasználva:

$$2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin 2x,$$

illetve:

$$2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos \left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin 2x.$$

Ezeket a helyettesítéseket alkalmazzuk az eredeti egyenletünkben:

$$\begin{aligned}
 &(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 + (1 - \sin 2x)^2 = \\
 &= 1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2 \sin 2x + \sin^2 2x + 1 - 2 \sin 2x + \sin^2 2x = \\
 &= \sin^2 2x - 2 \cos 2x + 4 = 6.
 \end{aligned}$$

Tovább alakítva másodfokú egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned}
 1 - \cos^2 2x - 2 \cos 2x + 4 &= 6, \\
 \cos^2 2x + 2 \cos 2x + 1 &= 0, \\
 (\cos 2x + 1)^2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Azaz $\cos 2x = -1$, amiből a $2x = \pi + 2k\pi$ (ahol $k \in \mathbb{Z}$) adódik.

Az egyenlet megoldásai: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (ahol $k \in \mathbb{Z}$).

8. Tekintsük az $y = (p - 1)x^2 + 2x - (p + 1)$ egyenletű parabolákat, ahol p valós paraméter és $p \neq 1$.

a) Melyek ezek közül azok a parabolák, amelyek az x tengelyt két, egész koordinátájú pontban metszik, vagy egy egész koordinátájú pontban érintik?

b) Írjuk fel $p = 2$ paraméter esetén a parabola 4 abszcisszájú pontján átmenő érintő egyenletét.

c) Határozzuk meg a $p = 3$ paraméter esetén az $[1; 3]$ intervallumon a parabola alatti terület nagyságát. (16 pont)

Megoldás. a) Meg kell határoznunk az $(p - 1)x^2 + 2x - (p + 1) = 0$ paraméteres, másodfokú egyenlet zérushelyeit:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(p-1)(p+1)}}{2(p-1)} = \frac{-2 \pm 2p}{2(p-1)} = \frac{-1 \pm p}{p-1}.$$

Vagyis a zérushelyek: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{-p-1}{p-1}$. (Természetesen $p = 0$ esetén $x_1 = x_2$.)

Csak azt kell megvizsgálnunk, hogy az x_2 milyen paraméterek esetén lesz egész, hiszen az x_1 mindig egész. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$x_2 = \frac{-p-1}{p-1} = \frac{-(p-1)-2}{p-1} = -1 - \frac{2}{p-1}.$$

A $p-1$ a 2 osztója kell, hogy legyen, vagyis a lehetséges értékei: $-2, -1, 1, 2$. Ezek alapján p -re négy megfelelő számot kapunk: $-1, 0, 2, 3$. A feladat feltételeinek eleget tevő parabolák:

$$y = -2x^2 + 2x, \quad y = -x^2 + 2x - 1, \quad y = x^2 + 2x - 3, \quad y = 2x^2 + 2x - 4.$$

b) A $p = 2$ paraméter esetén a parabola egyenlete a következő lesz:

$$y = x^2 + 2x - 3.$$

Tudjuk, hogy az érintő meredekségét minden helyen a derivált adja:

$$(x^2 + 2x - 3)' = 2x + 2.$$

Vagyis a 4 abszcisszájú pontban $2 \cdot 4 + 2$, azaz 10 lesz az érintő meredeksége. A 4-es abszcisszához $4^2 + 2 \cdot 4 - 3 = 21$ -es ordináta tartozik. Vagyis a $(4; 21)$ koordinátájú ponton áthaladó 10-es meredekségű egyenes lesz a keresett érintő:

$$\begin{aligned} y - 21 &= 10 \cdot (x - 4), \\ y &= 10x - 19. \end{aligned}$$

c) A $p = 3$ paraméter esetén a parabola egyenlete a következő lesz:

$$y = 2x^2 + 2x - 4.$$

A görbe alatti területet a következő határozott integrál adja:

$$\int_1^3 (2x^2 + 2x - 4) dx = \left[2 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x \right]_1^3 = 18 + 9 - 12 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = \frac{52}{3}.$$

Vagyis a $p = 3$ paraméter esetén az $[1; 3]$ intervallumon a parabola alatti terület $\frac{52}{3}$.

9. Három különböző egyenes körkúpról tudjuk, hogy az alapkörök sugara és a kúpok alkotói rendre egy-egy azonos differenciájú számtani sorozat három egymást követő elemét adják. Mutassuk meg, hogy a kúpok felszíne nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő eleme. (16 pont)

Megoldás. Az alapkörök sugarai legyenek: $r - d, r, r + d$, az alkotók pedig: $a - d, a, a + d$. Ekkor a három kúp felszíne:

$$A_1 = \pi(r-d)(a-d+r-d), \quad A_2 = \pi r(a+r), \quad A_3 = \pi(r+d)(a+d+r+d).$$

Ha A_1, A_2, A_3 egy számtani sorozat három egymást követő eleme lenne, akkor az $A_3 - A_2 = A_2 - A_1$ egyenlőségnek kellene teljesülnie. Számoljuk ki ezeket a különbségeket:

$$\begin{aligned} A_3 - A_2 &= \pi(r+d)(a+r+2d) - \pi r(a+r) = \\ &= \pi(ar + ad + r^2 + rd + 2rd + 2d^2 - ar - r^2) = \pi(ad + 3rd + 2d^2), \\ A_2 - A_1 &= \pi r(a+r) - \pi(r-d)(a+r-2d) = \\ &= \pi(ar + r^2 - ar + ad - r^2 + rd + 2rd - 2d^2) = \pi(ad + 3rd - 2d^2). \end{aligned}$$

Látható, hogy a két különbség csak $d = 0$ esetén lehetne egyenlő, de a kúpok különbözőek, ezért $d \neq 0$.

Vagyis a kúpok felszíne nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő eleme.