

# Egy nehéz Arany Dániel feladatról és egy szokatlan egyenlőtlenségről

## I. rész

### Bevezető

A 2012/2013-as Arany Dániel matematika verseny döntői során az alábbi feladat bizonyult a legnehezebbnek:

2013 valós számra fennáll:

$$(N) \quad \begin{aligned} a_1 &\geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{2012} \geq a_{2013} \geq 0, \quad \text{valamint} \\ a_{34}^2 + a_{35}^2 + \dots + a_{2013}^2 &\geq \frac{61}{4}. \end{aligned}$$

*Igazoljuk, hogy  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2012} + a_{2013} \geq \sqrt{2013}$ !*

*Lehet-e a fenti 2013 tagú összeg pontosan  $\sqrt{2013}$ ?*

Egy teljesnek mondható megoldás született, és lényeges részeredményekig is csak néhány versenyző jutott el a verseny során. Az első részben több megoldást mutatunk a feladatra, a folytatásban pedig a megoldásokban rejtett vagy kevésbé rejtett módon felhasznált szokatlan egyenlőtlenséget vizsgáljuk meg.

A cikk átnézéséért köszönet illeti Frankl Nórárt, Csajbók Bencét és Forrás Bencét, akik sokat segítettek a hibák és pontatlanságok javításában.

*Tudva, hogy a történetek még a matematikában sem érnek véget, az idősebbik szerző szeretettel ajánlja a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium 11.c osztályának ezt az epizódot.*

### 1. megoldás. „Vegyük észre! ...”

*Ez volt a „hivatalos” megoldás. Csupa egyszerű észrevételből jön ki – mint például  $2013 = 61 \cdot 33$ , meg hogy nagyobb pozitív számok szorzata nagyobb ... Talán ezért olyan reménytelen rátalálni.*

Tekintsük a 2013 számot egy véges, monoton csökkenő számsorozatnak. A számok összegét jelöljük  $S$ -sel, az első 33 tag összege legyen  $S_1$ , a további tagoké pedig  $S_2$ . Erre a két részre egymástól függetlenül keresünk alsó becslést. Kiderül majd, hogy ez a két becslés egyáltalán nem független, sőt ...

$$(1) \quad S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{33} \geq 33 \cdot a_{33},$$

hiszen a sorozat monoton csökken.

$S_2$  becsléséhez először is cseréljük ki minden egyes  $a_k^2$  tagot az  $(N)$  egyenlőtlenség bal oldalán a nála (ugyancsak a tagok monoton csökkenése miatt) nem kisebb  $a_{33} \cdot a_k$  tagra. Ezzel a négyzetösszeg nő, de éppen így lesz ebből alsó becslés  $S_2$ -re.

$$(2) \quad \frac{61}{4} \leq a_{34}^2 + a_{35}^2 + \dots + a_{2013}^2 \leq a_{33} \cdot \underbrace{(a_{34} + a_{35} + \dots + a_{2013})}_{S_2}.$$

Mivel  $a_{33}$  pozitív – miért? – oszthatunk vele:

$$(3) \quad S_2 \geq \frac{61}{4 \cdot a_{33}}.$$

Ha összeadjuk (1)-et és (3)-at:

$$S = S_1 + S_2 \geq 33 \cdot a_{33} + \frac{61}{4 \cdot a_{33}},$$

akkor a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel minden a helyére kerül:

$$S \geq 33 \cdot a_{33} + \frac{61}{4 \cdot a_{33}} \geq 2 \cdot \sqrt{33 \cdot a_{33} \cdot \frac{61}{4 \cdot a_{33}}} = \sqrt{2013}.$$

Ezt kellett bizonyítani.

Az egyenlőséghez az kell, hogy valamennyi becslésünkben egyenlőség álljon. Az utolsó becslésben tehát

$$33 \cdot a_{33} = \frac{61}{4 \cdot a_{33}}, \quad \text{azaz} \quad a_{33} = \sqrt{\frac{61}{4 \cdot 33}}.$$

Az (1) becslés miatt az első 33 tag egyenlő kell legyen:  $a_1 = a_2 = \dots = a_{33}$ .

A (3) becslés miatt pedig valamennyi ( $k > 33$ ) tagra  $a_k^2 = a_{33} \cdot a_k$ . Ez pontosan akkor teljesül, ha  $a_k = a_{33}$  vagy  $a_k = 0$ .

Mivel most  $a_{34}^2 + a_{35}^2 + \dots + a_{2013}^2 = \frac{61}{4} = 33 \cdot a_{33}^2$ , ez a monotonitás miatt csak úgy lehetséges, ha  $a_{34} = a_{35} = \dots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{132}}$ , a további tagok értéke pedig nulla.

Összefoglalva: egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a sorozat első 66 tagja egyenlő – a közös értékük  $\sqrt{\frac{61}{132}}$  – a további tagok pedig szintén egyenlők, értékük 0.

*Megjegyzések:* 1. 2009-ben a bosnyák olimpiai csapat válogatóversenyén szerepelt egy hasonló példa, amely az ezen cikk végén kitűzött feladatok közül az első.

2. Ha a megszokás által vezérelve azt feltételezzük, hogy egyenlő  $a_i$ -k esetén minimális  $S$ , akkor nagyon rossz becslést kapunk:

$$2013 \cdot \sqrt{\frac{61}{4 \cdot (2013 - 33)}} > \sqrt{31\,209}.$$

3. A megoldás lényegesen lerövidíthető, ha a (2) becslést az  $a_{33}$  helyett az  $a_1, \dots, a_{33}$  számok átlagával írjuk fel:

$$\frac{61}{4} \leq a_{34}^2 + \dots + a_{2013}^2 \leq a_{33}(a_{34} + \dots + a_{2013}) \leq \frac{a_1 + \dots + a_{33}}{33}(a_{34} + \dots + a_{2013}) = \frac{S_1 S_2}{33}.$$

Ezután a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva,

$$S = S_1 + S_2 \geq 2\sqrt{S_1 S_2} \geq 2\sqrt{33 \cdot \frac{61}{4}} = \sqrt{2013}.$$

## 2. megoldás. „A sakkjátszma ...”

(Janzer Barnabás dolgozata alapján)

Az  $S$  összeget most is az első megoldás  $S_1$  és  $S_2$  részeire bontjuk. Az  $S_1$  tagjai minden további nélkül csökkenthetők úgy, hogy valamennyien a pozitív  $a_{34}$ -gyel legyenek egyenlők, ezzel sem a feltételek nem változnak, sem pedig a bizonyítandó állítás. Az  $S_2$  összeg tagjait próbáljuk majd módosítani úgy, hogy a négyzetösszegük ne csökkenjen – és így ne sérüljön az  $(N)$  feltétel – az összegük pedig eközben lehetőség szerint ne nőjön. Mint majd kiderül, adott négyzetösszeg mellett  $S_2$  akkor lesz a legkisebb, ha a tagok valamilyen értelemben távol vannak egymástól. A támadás eszköze ezért egy „széthúzó” algoritmus lesz. Hogy aztán sikerül-e a támadás, az majd elvállik ...

Először is „észrevesszük”, hogy ha  $a_1 = a_2 = \dots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{132}}$ , és  $a_{67} = a_{68} = \dots = a_{2013} = 0$ , akkor egyenlőség teljesül, vagyis  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2013} = \sqrt{2013}$ .

Ezután megmutatjuk, hogy minden más esetben tudjuk úgy módosítani az  $a_i$  számokat, hogy a feltételek érvényben maradjanak, a számok összege ne nőjön, és végül legalább  $\sqrt{2013}$  legyen.

Az első szándékú terv a következő: az  $a_{34}, a_{35}, \dots$  számokat lépésenként párosával módosítjuk úgy, hogy a négyzetösszegük egyáltalán ne változzon, a kis indexűek – a nagyok –  $a_{34}$ -hez, a nagy indexűek – a kicsik – pedig a 0-hoz közeledjenek. A következő lemma szerint ez a módosítás nem növeli (általában csökkenti) a számok összegét.

**F-lemma:** Ha  $x \geq y \geq 0$ , és  $x$ -et megnöveljük,  $y$ -t pedig csökkentjük (de legfeljebb nulláig) úgy, hogy az új számok négyzetösszege megegyezzen az  $x^2 + y^2$  összeggel, akkor a kapott számok összege nem nagyobb, mint  $x + y$ .

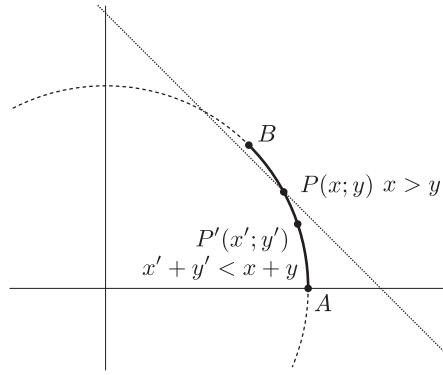
**Bizonyítás:** Feltehetjük, hogy  $x \geq y > 0$ . Legyen  $a, b > 0$  és

$$x^2 + y^2 = (x + a)^2 + (y - b)^2.$$

Innen  $2yb - 2xa = a^2 + b^2 > 0$ , vagyis  $yb > xa$ . Ez csak úgy lehetséges, ha  $b > a$ , hiszen  $y \leq x$ . Tehát

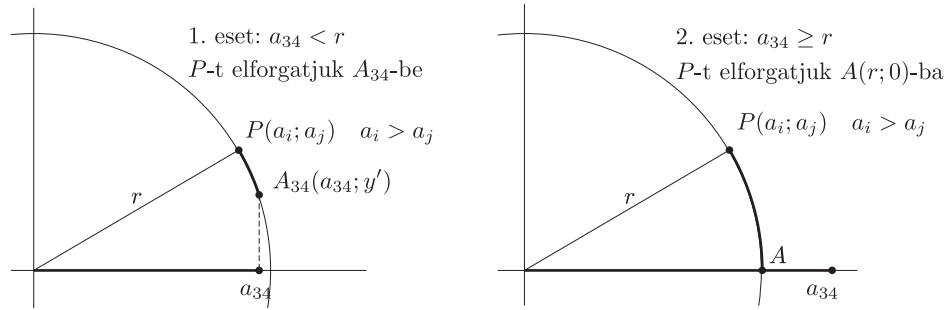
$$x + a + y - b = x + y - (b - a) < x + y.$$

*Megjegyzés:* Az állítás leolvasható az ábráról is: ha  $x > y$ , akkor a  $P$  az  $AB$  nyolcadköríven van, így pedig  $P$ -ből az  $A$  felé a köríven elmozdulva a koordináták négyzetösszege nem változik, az összegük pedig csökken.



Rögzítsük tehát  $a_{34}$  értékét. A sorozat első 33 elemét a megállapodás szerint csökkentsük  $a_{34}$ -re, és ezután már ne zaklassuk őket. A 34-nél nagyobb indexű elemeket párosával „húzzuk szét”; bár az ábra alapján kifejezőbb volna egy-egy számpár, illetve a megfelelő pont „elforgatásáról” beszélni.

Először az  $(a_{35}, a_{2013})$  párt forgatjuk el: ha  $a_{35}$  értéke eléri  $a_{34}$ -et, vagy  $a_{2013}$  eléri nullát, megállunk. A következő párhoz mindig vesszük a legkisebb indexű olyan elemet, amely kisebb  $a_{34}$ -nél, és a legnagyobb indexű olyat, amely még pozitív, és velük folytatjuk az eljárást. A két lehetőséget mutatják az *ábrák*.



Az első esetben a sorozat  $a_{34}$ -gyel egyenlő elemeinek a száma növekszik eggyel, a másodikban pedig a sorozat végén lévő nulláké. Az eljárás tehát véges sok lépésben befejeződik, elfogynak az elforgatható párok. A lépések során a négyzetösszeg nem változik, a sorozat marad monoton csökkenő és a számok összege csökken. Kétféleképpen maradhatunk elforgatható pár nélkül:

- i) a sorozat minden pozitív eleme  $a_{34}$ -gyel egyenlő, a sorozat  $x, x, \dots, x, 0, \dots, 0$  alakú;
- ii) a sorozatnak egyetlen olyan pozitív eleme van, amely kisebb  $a_{34}$ -nél, a sorozat  $x, x, \dots, x, y, 0, \dots, 0$  alakú, ahol  $x > y > 0$ .

Az persze mindkét esetben megeshet, hogy a sorozat végén egyáltalán nincsenek nullák, de ennek nincs jelentősége.

Az első esetben gyorsan kapjuk a bizonyítandó állítást. Ha a fenti i) sorozatnak összesen  $33 + m$  darab pozitív, egyenként  $x$  értékű eleme van, akkor az eljárás e sorozat elemeinek a „levágott” négyzetösszegére is biztosítja, hogy

$$mx^2 \geq \frac{61}{4}, \quad \text{ahonnan} \quad x \geq \sqrt{\frac{61}{4m}}.$$

Mivel a forgatások során a sorozat elemeinek az összege nem nőtt (általában csökkent), azért

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2013} \geq (33 + m)x \geq (33 + m) \cdot \sqrt{\frac{61}{4m}} = \frac{1}{2} \left( 33 \cdot \sqrt{\frac{61}{m}} + m \cdot \sqrt{\frac{61}{m}} \right).$$

A jobb oldalon két szám számtani közepe áll, amelyek mértani közepe éppen  $\sqrt{2013}$ , és így az állítás ebben az i) esetben valóban igaz.

A megoldás befejező részében megmutatjuk, hogy bár forgatni a második esetben már nem tudunk, ahhoz ugyanis egy párra volna szükség 0 és  $x$  között, de a „teljes mezőny széthúzásával” most is eljuthatunk egy alkalmas, i) típusú sorozathoz, amelyben tehát már csak egy pozitív érték fordul elő. Azt pedig az imént láttuk, hogy ilyenkor hogyan fejezhető be a megoldás. Most azonban változtatunk a stratégián: nem a számok négyzetösszegét tartjuk meg, hanem az összegüket, mégpedig úgy, hogy az első 33 elem elhagyása után megmaradó számok négyzetösszege – az (N) feltétel erre a „levágott” négyzetösszegre vonatkozik! – eközben növekedjék vagy legalábbis ne csökkenjen. Mindenesetre adott sorozat esetén jelöljük ezt az  $a_{34}^2 + a_{35}^2 + \dots + a_{2013}^2$  összeget  $Q(a)_{34}$ -gyel.

Hogy az élet ne legyen olyan egyszerű, ezt a széthúzást másként kell csinálni akkor, ha az ii) sorozatnak viszonylag sok pozitív eleme van és másként akkor, ha kevesebb. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az ii) sorozat elhagyott elemeinek a száma, 33, milyen viszonyban áll  $m$ -el.

*I. eset:*  $33 \leq m$ . Ekkor az *ii)* sorozat  $y$  tagját 0-ra cseréljük, értékét pedig igazságosan szétosztjuk az összesen  $(33 + m)$  darab pozitív, egyenként  $x$  értékű pozitív tag között. Az új, immár  $i$ ) típusú sorozat

$$\underbrace{\tilde{x}, \tilde{x}, \dots, \tilde{x}}_{33+m}, 0, \dots, 0 \text{ alakú, ahol } \tilde{x} = x + \frac{y}{33+m}.$$

A kapott nemnegatív elemű  $\tilde{x}$  sorozat monoton csökkenő marad, elemeinek összege pedig nem változott. Meg kell mutatnunk, hogy az  $(N)$  feltétel sem sérült, a levágott négyzetösszeg nőtt, azaz

$$Q(x)_{34} = mx^2 + y^2 \leq Q(\tilde{x})_{34} = m \left( x + \frac{y}{33+m} \right)^2.$$

A jobb oldal értéke nem nő, ha a nevezőben  $33 + m$  értékét  $2m$ -re növeljük. Beszorzás és rendezés után kapjuk, hogy elegendő, ha

$$4my^2 \leq 4mxy + y^2,$$

ez pedig  $0 < y < x$  miatt „vastagon” igaz.

Ha viszont  $m < 33$ , akkor ez a becslés nem működik (tessék ellenőrizni!) és így az *ii)* sorozat fenti módosítása nem vezet eredményre. Ezt a bonyodalmat a megoldás ismertetése közben, a „tábla mellett” átlátni, megemlékezni a kudarcot és hideg fejjel itt is megtalálni a nyerő kombinációt ... bravúros teljesítmény!

*II. eset:*  $m < 33$ . A megoldó ebben az esetben az összesen  $34 + m$  darab pozitív elem mindegyikét az átlagukkal,

$$\bar{x} = \frac{(33+m)x + y}{34+m} \text{-mel}$$

helyettesíti. A sorozat elemeinek az összege nem változik, így a már látottak szerint most is annyit kell megmutatni, hogy a levágott négyzetösszeg nem csökkent, azaz

$$mx^2 + y^2 \leq (m+1) \cdot \bar{x}^2 = (m+1) \cdot \left( \frac{(33+m)x + y}{34+m} \right)^2.$$

A megoldónak ezt a – teljes megoldáshoz egyedül hiányzó – állítást is sikerült utólag igazolnia. Ahelyett, hogy ideiktatnánk a számolást, az állítás bizonyítását feladatul tűzzük ki az Olvasó számára. A kérdésre egyébként a cikk második részében visszatérünk.

*Megjegyzés.* Bár a feladat szövege nem kérte, az első megoldásban pontosan tisztáztuk, hogy a megadott feltételek mellett mikor van egyenlőség. Akinek van hozzá kedve, vizsgálja meg ebből a szempontból a második megoldás lépéseit.

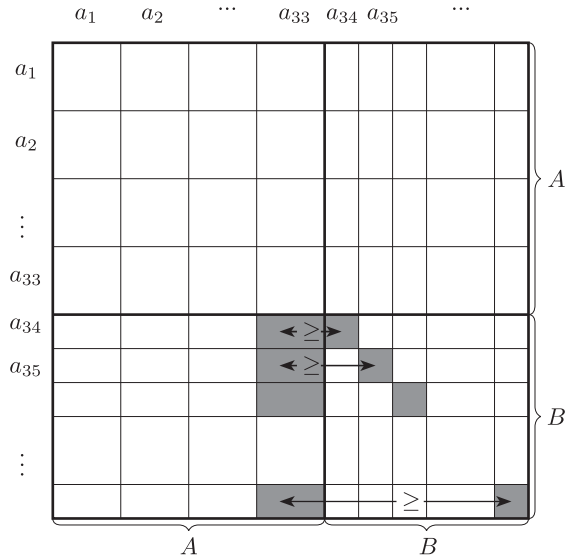
### 3. megoldás. „Látványmatematika”

*(Sztranyák Attila megoldása, Cserhádi Zoltán ötlete alapján)*

*Mind ez idáig nem foglalkoztunk azzal, hogy feladatunkban különböző dimenziójú egyenlőtlenségek szerepelnek. Egy másodfokú feltétel mellett kell egy elsőfokú kifejezés minimumát megadni. Természetes gondolat, hogy a másodfokú kifejezést értelmezzük egy alakzat területként, az elsőfokút pedig egy szakasz hosszaként, másrészt hogy a bizonyítandó állítás dimenzióját egy négyzetre emeléssel a feltételéhez igazítsuk.*

Rajzoljunk fel egy négyzetet, amelynek oldala  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2013}$ , és osszuk fel vízszintes és függőleges egyenesekkel téglalapokra úgy, hogy a „sávok” szélessége balról jobbra és fentről lefelé éppen  $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$  legyen. Ha  $A = a_1 + a_2 + \dots + a_{33}$  és  $B = a_{34} + \dots + a_{2013}$ , akkor a fenti felosztás úgy is tekinthető, mint egy  $(A + B)^2$  „típusú” felosztás.

Az állítást a megállapodás szerint  $(A + B)^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_{2013})^2 \geq 2013$  alakban igazoljuk, és mint kiderül, a bizonyítás két egyszerű észrevételen múlik. Az egyik örökzöld alsó korlát az  $(A + B)^2$  értékére, a másik pedig az  $A \cdot B$  szorzatra itt és most érvényes alsó becslés.



1.  $(A + B)^2 \geq 4AB$ , ez lényegében a számtani és mértani közép egyenlőtlensége két tagra.
2. Ami izgalmasabb, hogy az ábrán látható  $A \cdot B$  területű téglalapok területe is becsülhető alulról. Ugyanis – felhasználva az  $a_i$  számokra vonatkozó monotonitási feltételt, ami a megoldás egyik kulcsa – ezek a téglalapok 33 olyan téglalapra vághatóak, amelyek egyenként nagyobb területűek, mint a jobb alsó átlóban található négyzetek területének összege. Tehát  $A \cdot B \geq 33 \cdot \frac{61}{4}$ .

Megdöbrentő, de lényegében készen vagyunk; a két becslés együtt éppen kiadja a bizonyítandó állítást:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{2013})^2 = (A + B)^2 \geq 4AB \geq 4 \cdot 33 \cdot \frac{61}{4} = 2013.$$

Egyenlőség akkor teljesül, ha mindkét becslésben egyenlőség áll. Az algebrai feltételnél ez  $A = B$  esetén igaz.

A területekre vonatkozó feltételeknél pedig az kell, hogy az  $A$  szélességű sávban minden téglalap ugyanolyan széles legyen, mint  $B$ -beli megfelelője. A satírozott téglalapokat összehasonlítva innen kapjuk, hogy  $a_1 = a_{34}$ ,  $a_1 = a_{35}$ ,  $a_1 = a_{36}$ ,  $\dots$ . Az  $A = B$  feltétel miatt pedig ez csak úgy lehetséges, ha az  $a_1 = a_{66}$  párral véget is ér a sorozat,  $a_{67} = a_{68} = \dots = a_{2013} = 0$ . Innen egyszerű számolással  $a_1 = a_2 = \dots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{132}}$ .

*Megjegyzés:* A geometriai megközelítés sikerét látva felbátorodhatunk, és kereshetünk megfelelő térbeli állítást. A fenti ötletek alkalmas módosításával oldható meg a 2. feladat.

### Feladatok

1. 100 valós számra fennáll, hogy  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{99} \geq a_{100} \geq 0$ , valamint, hogy  $a_1^2 + a_2^2 \geq 100$ , és  $a_3^2 + a_4^2 + \dots + a_{100}^2 \geq 100$ . Mennyi  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$  minimuma?
2. Bizonyítsuk be, hogy ha 2013 valós számra fennáll, hogy  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{2012} \geq a_{2013} \geq 0$ , valamint, hogy

$$a_{67}^3 + a_{68}^3 + \dots + a_{2013}^3 \geq \frac{61}{891},$$

akkor

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2013} \geq \sqrt[3]{2013},$$

és egyenlőség akkor teljesül, ha  $a_1 = a_2 = \dots = a_{99} = \sqrt[3]{2013}/99$ , továbbá  $a_{100} = a_{101} = \dots = a_{2013} = 0$ .

3. A 2. megoldás utolsó lépése.

Legyen  $m < 33$  pozitív egész,  $x$  és  $y$  pedig olyan valós számok, amelyekre  $0 < y < x$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$mx^2 + y^2 \leq (m + 1) \cdot \left( \frac{(33 + m)x + y}{34 + m} \right)^2.$$