

I. rész

1. Péter a telefonján az egyik hónapban 18 hívást kezdeményezett és 60 percet beszélt hálózaton belül. Hálózaton kívül pedig 11 hívást kezdeményezett és 45 percet beszélt. 10 db SMS-t küldött.

Hasonlítsuk össze, és számításokkal igazoljuk, hogy a megadott tarifacsomagok közül („Haver 1”, „Haver 2”) melyik lett volna kedvezőbb számára az adott hónapban.

Tarifacsomag neve	Haver1	Haver2
Lebeszélhető havidíj	1710 Ft 100%-ban hálózaton belül	3850 Ft 60%-ban hálózaton belül 40%-ban hálózaton kívül
Percdíj a havidíj felhasználásáig	38 Ft	35 Ft
Percdíj a havidíj felhasználása után	40 Ft	38 Ft
SMS küldés díja	40 Ft	38 Ft
Kapcsolási díj	3 Ft	3 Ft

A kapcsolási díj a havidíj-lebeszélhetőségbe nem számít bele, mindig a havidíjon felül kerül kiszámlázásra. (11 pont)

Megoldás. A „Haver 1” tarifacsomag esetén $1710 : 38 = 45$ perc beszélhető le hálózaton belül. Marad neki $60 - 45 = 15$ perc. Ezért a havidíjon felül fizetendő: $15 \cdot 40 = 600$ Ft. A hálózaton kívüli percekért fizetendő $45 \cdot 40 = 1800$ Ft, az SMS-ért $10 \cdot 40 = 400$ Ft. Kapcsolási díj: $(18 + 11) \cdot 3 = 87$ Ft. A költség összesen:

$$1710 + 600 + 1800 + 400 + 87 = 4597 \text{ Ft.}$$

A „Haver 2” tarifacsomag esetén mivel $3850 \cdot 0,6 = 2310$ és $2310 : 35 = 66$, azért 66 percet beszélhetne hálózaton belül. Ebből csak 60 percet beszélt le, ami 2310 Ft. Mivel $3850 \cdot 0,4 = 1540$ és $1540 : 35 = 44$, azért 44 percet beszélhet hálózaton kívül, de ő beszélt még 1 percet: $1540 + 38 = 1578$ Ft. Az SMS-ért $10 \cdot 38 = 380$ Ft-ot, a kapcsolási díjért $29 \cdot 3 = 87$ Ft-ot fizetett. Összes költség:

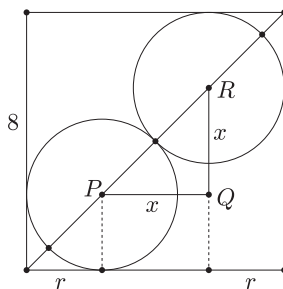
$$2310 + 1578 + 380 + 87 = 4355 \text{ Ft.}$$

Tehát a „Haver 2” kedvezőbb a számára, $4597 - 4355 = 242$ Ft-tal.

2. Egy négyzet alapú hasáb alakú doboz alapéle 8 cm. A doboz négyzet alakú aljába éppen belefér két egyforma átmérőjű, körlapjával az alaplapon fekvő érem úgy, hogy az érmék a doboz 2-2 szomszédos oldallapját és egymást is érintik. Mekkora az érmék átmérője? (12 pont)

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit. Legyen $PR = 2r = d$; $PQ = QR = x$. A PQR egyenlő szárú derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint:

$$(2r)^2 = x^2 + x^2, \quad \text{ebből} \quad x = \sqrt{2} \cdot r.$$



Mivel a négyzet oldala 8 cm, azért $2r + x = 8$, azaz $2r + \sqrt{2}r = 8$. Vagyis $r = \frac{8}{2 + \sqrt{2}}$.

Tehát az érmék átmérője: $d = 2r \approx 4,7$ cm.

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\cos 2x + 5 \cdot \sin x + 2 = 0$; (7 pont)

b) $2 \log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} = 5$. (7 pont)

Megoldás. a) Felhasználva, hogy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ és $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet a következő másodfokú egyenletre vezet:

$$2 \cdot \sin^2 x - 5 \cdot \sin x - 3 = 0.$$

Ennek gyökei: $\sin x = -\frac{1}{2}$ és $\sin x = 3$. Ez utóbbiból a szinusz függvény értékkészlete miatt nem adódik megoldás.

Az egyenlet megoldása:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad x_2 = \frac{7\pi}{6} + l \cdot 2\pi, \quad \text{ahol } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Ezek valóban megoldásai ez eredeti egyenletnek.

b) Az egyenlet mindkét oldalát $\log_5 x$ -szel megszorozva és rendezve, az előzőhöz hasonló másodfokú egyenlethez jutunk:

$$2 \log_5^2 x - 5 \log_5 x - 3 = 0.$$

Ebből

$$\begin{aligned} \log_5 x_1 &= -\frac{1}{2}, & \text{amiből } x_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}; \\ \log_5 x_2 &= 3, & \text{amiből } x_2 &= 125. \end{aligned}$$

Ezek a megoldások kielégítik az eredeti egyenletet.

4. Egy 10 pontos tesztfeladatot harminc tanuló oldott meg. Az eredmény a következő lett:

pontszám	3	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság	2	3	7	2	2	5	5	4

a) A tanár gratulált az osztálynak, mert az egyik középértéknél a tanulók $\frac{3}{5}$ része több pontot ért el. Melyik közép-értékre gondolt a tanár? (6 pont)

b) Két tanuló később írta meg a tesztet. Az ő eredményüket is beleszámítva a medián 0,5-del; az átlag 0,075-del nőtt. Hány pontot érhettek el ők? (8 pont)

Megoldás. a) A pontszámok átlaga:

$$(3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 4) : 30 = 204 : 30 = 6,8.$$

Ennél jobbat írt 16 fő. Mivel $\frac{16}{30} < \frac{3}{5}$, azért nem az átlagra gondolt.

A medián, azaz a 15. és 16. elem átlaga: $\frac{7+7}{2} = 7$. Ennél jobbat írt 14 fő. Mivel $\frac{14}{30} < \frac{3}{5}$, azért nem a mediánra gondolt.

A módusz, azaz a leggyakrabban előforduló elem: 5. Ennél jobbat írt 18 fő. Mivel $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$, azért a tanár a móduszra gondolt. b) A két tanuló pontszámát jelölje x és y . Az új átlag: $\frac{204 + x + y}{32} = 6,875$, ebből $x + y = 16$. A szóba jöhető felbontások: $16 = 6 + 10 = 7 + 9 = 8 + 8$. Ezek közül csak az $x = y = 8$ jöhet szóba, mert ekkor a medián 0,5-del nő; a másik két esetben a medián nem változik. Tehát a tesztet később megíró mindkét tanuló pontszáma 8.

Ez a megoldás valóban eleget tesz mindkét feltételnek.

II. rész

5. A „Vigyáz(z)6” című játékban 1-től 104-ig számozott kártyák szerepelnek. A lapokon ökörfejek is találhatók a következő szabályok szerint:

- az 55-ös lapon 7 db;
- a többi 5-re végződő számot tartalmazó lapon 2-2 db;
- a többi azonos számjegyekből álló kétjegyű számot tartalmazó lapon 5-5 db;
- a 0-ra végződő számot tartalmazó lapokon 3-3 db;
- az összes többi lapon 1-1 db ökörfej található.

A játék elején 4 lapot felcsapnak, minden játékos 10-10 lapot kap, a többi lap pedig talonba kerül.

- a) Hány ökörfej található a lapokon összesen? (4 pont)
- b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a négy felcsapott lap mindegyikén egynél több ökörfej szerepel? (6 pont)
- c) Hat játékos esetén mi a valószínűsége, hogy a talonban van legalább egy olyan lap, amelyen 5 vagy annál több ökörfej szerepel? (6 pont)

Megoldás. a) A megadott intervallumon hét ökörfejet tartalmazó kártya: 55 (1 lap);
két ökörfejet tartalmazó kártyák: 5, 15, 25, 35, 45, 65, 75, 85, 95 (9 lap);
öt ökörfejet tartalmazó kártyák: 11, 22, 33, 44, 66, 77, 88, 99 (8 lap);
három ökörfejet tartalmazó kártyák: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 (10 lap).

Ez összesen 28 lap. A többi 76 lapon csak egy ökörfej található. Vagyis az ökörfejek száma összesen:

$$1 \cdot 7 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 76 \cdot 1 = 171 \text{ db.}$$

b) A klasszikus valószínűségi mező esetén alkalmazható képlettel dolgozunk. Kedvező esetek száma = $\binom{28}{4}$, az összes esetek száma = $\binom{104}{4}$, vagyis

$$p = \frac{\binom{28}{4}}{\binom{104}{4}} \approx 0,00445$$

a valószínűsége annak, hogy a négy felcsapott lap mindegyikén egynél több ökörfej van. c) 5 vagy annál több (7) ökörfej $8 + 1 = 9$ db lapon szerepel; $104 - 9 = 95$ db lapon ennél kevesebb ökörfej van. Hat játékos esetén 40 db lap van a talonban.

Érdeemes először a komplementer esemény valószínűségét meghatározni. Az eredeti eseményt A -val jelölve, $\overline{A} = \{\text{a talonban levő lapok között nincs olyan, amelyen 5 vagy annál több ökörfej szerepel}\}$. Ebben az esetben is klasszikus valószínűségi mezőről van szó,

$$p(\overline{A}) = \frac{\binom{95}{40}}{\binom{104}{40}} \approx 0,01.$$

Tehát $p(A) = 1 - p(\overline{A}) \approx 0,99$ a valószínűsége annak, hogy hat játékos esetén van legalább egy olyan lap a talonban, amelyen 5 vagy annál több ökörfej szerepel.

6. Egy üzemben henger alakú, egyliteres mérőedényeket gyártanak.

Mekkora legyen a henger alapkörének sugara, illetve a henger magassága, hogy az anyagfelhasználás minimális legyen

a) fedetlen; (8 pont)

b) fedett mérőedény esetén? (8 pont)

A választ milliméter pontossággal adjuk meg.

Megoldás. a) A henger magassága legyen m ; alapkörének sugara legyen r . A henger térfogata: $V = r^2 \pi \cdot m = 1 \text{ dm}^3$, ezért $m = \frac{1}{r^2 \pi} \text{ dm}$.

Az anyagfelhasználás akkor minimális, ha a henger felszíne minimális.

a) Fedetlen edény esetén a felszín: $A = r^2 \pi + 2r\pi m$, $A(r) = r^2 \pi + \frac{2}{r}$. Ennek a kifejezésnek akkor van minimuma, ha az első deriváltja 0 és a második deriváltja pozitív:

$$A'(r) = 2r\pi - \frac{2}{r^2} = 0 \quad \text{és} \quad A''(r) = 2\pi + \frac{4}{r^3} > 0.$$

Az elsőből

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}} \cdot \pi} = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0,68 \text{ dm.}$$

Ekkor $A''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right) > 0$.

Vagyis az anyagfelhasználás akkor minimális, ha $r = m \approx 0,68 \text{ dm} = 68 \text{ mm}$.

b) Fedett edény esetén a felszín:

$$A(r) = 2r^2 \pi + 2r\pi m = 2r^2 \pi + \frac{2}{r},$$

$$A'(r) = 4r\pi - \frac{2}{r^2} = 0 \quad \text{és} \quad A'' = 4\pi + \frac{4}{r^3} > 0.$$

Az elsőből $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0,54 \text{ dm}$ és $m = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1,08 \text{ dm}$, ekkor $A''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) > 0$.

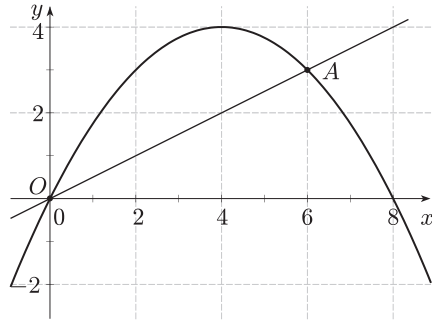
Vagyis az anyagfelhasználás akkor minimális, ha $r \approx 0,54 \text{ dm} = 54 \text{ mm}$;
 $m \approx 1,08 \text{ dm} = 108 \text{ mm}$.

7. Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola áthalad a $(8; 0)$ ponton és az origón. Az origóba húzott érintőjének irántangense 2.

a) Határozzuk meg a , b és c értékét. (6 pont)

b) Az origón és a parabola 6 abszcisszájú pontján keresztül szelőt húzunk. Mekkora területet zár közre ez a szelő és a parabola? (10 pont)

Megoldás. a) Mivel a parabola áthalad a $(8;0)$ és a $(0;0)$ pontokon, felírhatjuk a következő egyenleteket: $0 = a \cdot 64 + b \cdot 8 + c$, $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$. Ezekből kapjuk, hogy $c = 0$ és $a = -\frac{1}{8}b$.



Az origóba húzott érintő iránytangense a pontbeli első derivált:

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f'(0) = 0 + b = 2.$$

Tehát $a = -\frac{1}{4}$; $b = 2$; $c = 0$.

b) Mivel $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$, azért $f(6) = 3$. Az origón és az $A(6;3)$ pontokon áthaladó szelő egyenlete: $y = \frac{1}{2}x$. A kérdéses terület:

$$\int_0^6 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{2}x \right) dx = \int_0^6 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \right) dx = \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^6 = 9.$$

A parabola és a szelő által közrezárt terület 9 területegység.

8. a) Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra $64 \mid 9^n - 8n - 1$. (8 pont)

b) Igaz-e, hogy $2013^2 + 2014 \mid 2013^{2014} - 2013$? Indokoljuk válaszunkat. (8 pont)

Megoldás. a) Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 0$ -ra: $64 \mid 0$; igaz; ($n = 1$ -re: $64 \mid 0$; igaz; $n = 2$ -re: $64 \mid 64$; igaz).
Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra igaz, vagyis $64 \mid 9^k - 8k - 1$. Be kell látnunk, hogy $n = k + 1$ -re is igaz, azaz $64 \mid 9^{k+1} - 8(k+1) - 1$. A kifejezést átalakíthatjuk a következő módon:

$$9 \cdot 9^k - 8k - 9 = 9 \cdot (9^k - 8k - 1) + 64k.$$

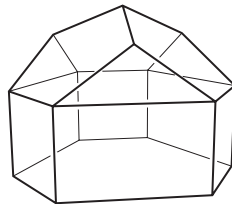
Az utóbbi kifejezés első tagja az indukciós feltevés miatt, a második tag nyilvánvalóan osztható 64-gyel, tehát az összeg is osztható 64-gyel. Ezzel az állítást igazoltuk.

b) Legyen $a = 2013$. Ekkor a baloldal így írható: $a^2 + a + 1$. A jobboldal:

$$a^{2014} - a = a(a^{2013} - 1) = a[(a^3)^{671} - 1^{671}] = a(a^3 - 1)(a^{670} + a^{669} + \dots + a + 1).$$

Mivel $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$, azért az állítás igaz.

9. Egy turisták pihenőjeként szolgáló építmény legfelső csúcsában három darab szabályos ötszög található az ábrán látható módon.

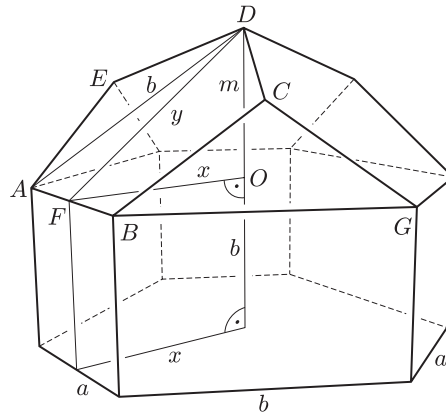


A szabályos ötszögek oldalai 1,5 m hosszúak. Az építmény oldallapjai téglalapok, amelyeknek a talajra merőleges oldalai szintén 1,5 m hosszúak.

a) Milyen magas az építmény? (8 pont)

b) Mekkora az építmény alapterülete? (8 pont)

Megoldás. a) Használjuk az 1. ábra jelöléseit. A szöveg alapján $a = 1,5$ m. Az ábrán $AD = BG$, mert a tetőszervezetet tekinthetjük egy szabályos dodekaéder részének, amelyhez a C csúcsnál egy újabb szabályos ötszög csatlakozna. Legyen $AD = BG = b$; $FO = x$; $FD = y$; $OD = m$.



1. ábra

Az ábrán b -vel jelölt szakaszok hossza megegyezik a szabályos ötszög átlójával. A szabályos ötszög egy szöge:

$$\alpha = \frac{3 \cdot 180}{5} = 108^\circ.$$

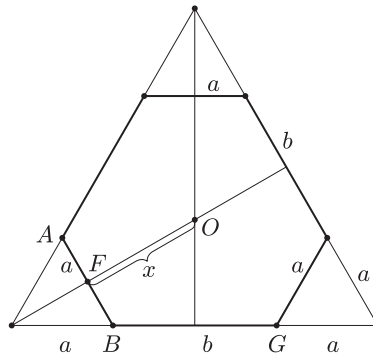
Ugyanekkora a BCG nagysága is.

A BGC háromszögben a koszinusz-tétel alapján: $b^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos 108^\circ$, ebből $b \approx 2,43$ m. Az EAD háromszögben

$$EAD \sphericalangle = EDA \sphericalangle = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Az AFD háromszögben $DAF \sphericalangle = 108^\circ - EAD \sphericalangle = 72^\circ$, az 1. ábrán y -nal jelölt szakaszra felírható az AFD háromszögben: $\sin 72^\circ = \frac{y}{b}$. Ebből $y \approx 2,31$ m.

Az 1. ábrán x -szel jelölt szakasz kiszámításához tekintsük az alaplapot alkotó hatszöget. Ennek szemközti oldalai párhuzamosak és oldalainak hossza rendre: a, b, a, b, a, b , mert a megfelelő oldalak 120° -os elforgatottjai egymásnak az OD egyenes, mint térbeli forgástengely körül (ez a forgatás a szerkezetet és a dodekaédert is önmagába viszi). Ezért ez a hatszög kiegészíthető szabályos háromszöggé a 2. ábrán látható módon.



2. ábra

Az ábra alapján az x -szel jelölt szakasz kiszámítható a $b + 2a$ oldalú szabályos háromszög súlyvonala kétharmad részének és az a oldalú szabályos háromszög magasságának különbségeként:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (b + 2a) - \frac{\sqrt{3}}{2} a \approx 1,84 \text{ m.}$$

A DFO háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva: $m = \sqrt{y^2 - x^2} \approx 1,40$ m. Az építmény magassága $M = a + m \approx 2,9$ m.

b) Az alapterületet kiszámolhatjuk úgy, hogy a $b + 2a$ oldalú szabályos háromszög területéből kivonjuk az a oldalú szabályos háromszög területének háromszorosát:

$$T = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (b + 2a)^2 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \approx 9,84 \text{ m}^2.$$

Tehát az építmény alapterülete: $9,84 \text{ m}^2$.