

Megoldásvázlatok a 2012/8. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. Egy iskola 520 tanulójaival 9 kérdésből álló tesztet töltettek ki. A kérdésekre igennel vagy nemmel lehetett válaszolni. Mindenki válaszolt az összes kérdésre. Az értékelés úgy történt, hogy a k . kérdésre adott jó válasz k pontot, rossz válasz $-k$ pontot ért.

a) Mutassuk meg, hogy biztosan volt két tanuló, aki ugyanúgy töltötte ki a tesztlapot.

b) Legalább hány tanulónak volt ugyanannyi pontja az értékelés után?

(11 pont)

Megoldás. a) Mivel $2^9 = 512$ -féleképpen lehet a tesztlapot kitölteni, azért 520 tanuló között biztosan lesznek ketten, akik ugyanúgy töltötték ki a tesztet.

b) A maximális pontszám: $1 + 2 + \dots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$. A minimális pontszám: -45 .

Egy feladatra adott hibás válasszal páros pontszámmal csökken az elérhető maximális pontszám, tehát -45 és 45 közötti páratlan számok lehetnek a pontszámok. Mivel ezen az intervallumon 46 páratlan szám van, azért 46-féle végösszeg lehet. (Könnyen látható, hogy ezek mindegyike valóban elő is fordulhat.) Ha minden pontszámot legfeljebb 11 tanuló ért volna el, akkor $46 \cdot 11 = 506$ diák járhatna maximálisan az iskolába.

Tehát biztosan volt legalább 12 tanuló, akik ugyanannyi pontszámot szereztek.

2. a) Állítsuk elő a 2012-t szomszédos természetes számok összegeként.

b) Egy számtani sorozat első 2013 elemének összege 2012. Az első 2012 elem közül a páros indexűek összege eggyel több, mint a páratlan indexűek összege. Határozzuk meg a sorozat első elemét.

(13 pont)

Megoldás. a) Legyen a legkisebb szám $k + 1$, a legnagyobb $k + n$.

Ezek összege:

$$nk + \frac{n(n+1)}{2} = 2012 = 2^2 \cdot 503,$$
$$n(2k + n + 1) = 8 \cdot 503.$$

A bal oldali szorzat két tényezője két különböző paritású természetes szám, és a második nagyobb, mint az első, tehát $n = 8$.

Mivel $2k + 8 + 1 = 503$, azért $k = 247$. Tehát a keresett szomszédos természetes számok:

$$248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253 + 254 + 255 = 2012.$$

b) Mivel a számtani sorozat első 2013 elemének összege 2012, azért felírható, hogy

$$S_{2013} = 2013 \cdot \frac{2a_1 + 2012d}{2} = 2012,$$
$$a_1 = \frac{2012}{2013} - 1006d.$$

Tudjuk, hogy az első 2012 elem közül a páros indexűek összege eggyel nagyobb, mint a páratlan indexűek összege, azaz:

$$(a_{2012} + \dots + a_2) - (a_{2011} + \dots + a_1) = 1,$$
$$(a_{2012} - a_{2011}) + \dots + (a_2 - a_1) = 1,$$
$$1006d = 1.$$

Tehát a sorozat első eleme: $a_1 = \frac{2012}{2013} - 1 = -\frac{1}{2013}$.

3. Adott a valós számokon értelmezett

$$I(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$$

függvény, és tudjuk, hogy $f(t) = 3t^2 + 4t - 1$. Határozzuk meg az $I(x)$ zérushelyeit, és azokat az intervallumokat, melyeken konvex, illetve konkáv a függvény.

(13 pont)

Megoldás.

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-2}^x (3t^2 + 4t - 1) dt = [t^3 + 2t^2 - t]_{-2}^x = x^3 + 2x^2 - x - (-8 + 8 + 2) = \\ &= x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) = \\ &= (x + 2)(x + 1)(x - 1). \end{aligned}$$

Tehát $I(x)$ zérushelyei: $x = -2, -1, 1$.

$I(x)$ második deriváltjának előjeléből állapíthatjuk meg, hogy hol konvex, illetve hol konkáv a függvény.

$$I''(x) = (x^3 + 2x^2 - x - 2)'' = (3x^2 + 4x - 1)' = 6x + 4.$$

Ha $x > -\frac{2}{3}$, akkor $I(x)$ konvex. Ha $x < -\frac{2}{3}$, akkor $I(x)$ konkáv. (Az $x = -\frac{2}{3}$ -nál inflexiós pont van.)

4. A párizsi Louvre üvegpiramisának (szabályos négyoldalú gúla) alapélét vegyük 34 m-nek, magasságát pedig 22 m-nek.

a) Mekkora felületet kell az ablakmosó csapatnak letisztítani, ha kívülről és belülről is lemosák az üveglapokat?

Éjszaka a piramist oszlopokon álló reflektorokkal szeretnék megvilágítani. Az oszlopokat egy négyzet csúcsaiban állítják fel, melynek oldalfelező pontjai a piramis alapjának csúcsai.

b) Milyen magasan kell a reflektorokat az oszlopon elhelyezni, hogy a belőlük kiinduló fénysugarak az oldallapok súlypontjaiban merőlegesen essenek az üvegfelületekre?

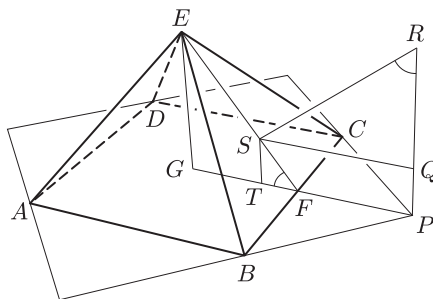
(14 pont)

Megoldás. a) Készítsünk a szöveg alapján ábrát. Tudjuk, hogy

$$AB = 34, \quad EG = 22.$$

Ekkor Pitagorasz-tétellel:

$$EF = \sqrt{22^2 + \left(\frac{34}{2}\right)^2} \approx 27,8.$$



A gúla palástjának kétszeresét kell vennünk:

$$2 \cdot t_{\text{palást}} = 8 \cdot \frac{BC \cdot EF}{2} = 4 \cdot BC \cdot EF = 4 \cdot 34 \cdot 27,8 = 3780,8 \text{ m}^2.$$

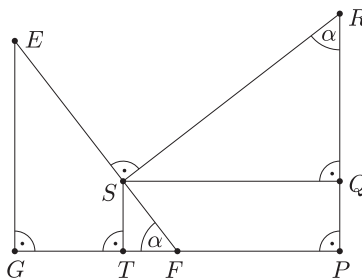
Tehát kb. 3781 m² üvegfelületet kell lemosniuk.

b) Rajzoljuk le a számunkra fontos síkmetszetet, és alkalmazzuk az ábra jelöléseit. Ekkor

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{22}{17}, \quad \text{vagyis} \quad \alpha \approx 52,3^\circ.$$

Már tudjuk, hogy $EF \approx 27,8$, ezért

$$SF = \frac{27,8}{3} \approx 9,27.$$



GFE és PRS merőleges szárú hegyesszőgek, tehát egyenlők. Tudjuk, hogy $TF = \frac{17}{3} \approx 5,67$, ezért $SQ = TF + FP = 5,67 + 17 = 22,67$.

$$\begin{aligned} QP &= ST = SF \cdot \sin \alpha = 9,27 \cdot \sin 52,3^\circ \approx 7,33, \\ \frac{SQ}{QR} &= \operatorname{tg} \alpha = \frac{22}{17} = \frac{22,67}{QR}, \quad \text{vagyis} \quad QR \approx 17,52, \\ PR &= QP + QR = 7,33 + 17,52 = 24,85. \end{aligned}$$

A reflektorokat az oszlopokon kb. 25 m magasan kell elhelyezni.

II. rész

5. Adott az $f(x) = \log_2(x+4) + 1$ hozzárendelésű függvény. Tudjuk, hogy az A_nOC_n háromszögek egyenlőszárú, O -nál derékszögű háromszögek, ahol A_n az $f(x)$ függvény grafikonjának egy pontja, O pedig az origó.

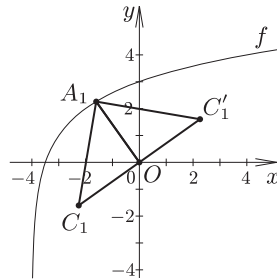
- a) Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt. Adjuk meg egy tetszőleges A_n esetén a háromszög C_n csúcsának koordinátáit.
b) Határozzuk meg a C_n pontok halmazát, és ábrázoljuk a koordináta-rendszerben.

(16 pont)

Megoldás. a) Az $f(x)$ grafikonjáról választunk egy tetszőleges pontot. Legyen az első koordinátája a . Ekkor a második koordinátája:

$$f(a) = \log_2(a+4) + 1.$$

Vagyis a választott pont: $A_1(a; \log_2(a+4) + 1)$.



A háromszög harmadik csúcsát megkapjuk, ha az origó körül 90° fokkal elforgatjuk a választott A_1 pontot. Ha a körülforgatástól eltekintünk, két lehetőség adódik a harmadik csúcsra attól függően, hogy merre forgatunk:

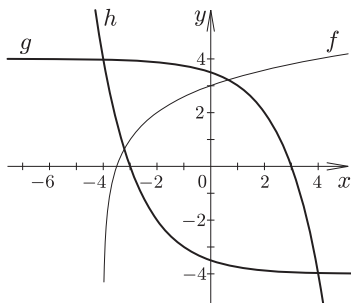
$$C_1(-\log_2(a+4) + 1; -a), \quad \text{illetve} \quad C_1'(\log_2(a+4) + 1; a).$$

b) Az A_n pontot egy O körüli 90° -os forgatás viszi a C_n pontba. A 90° -os forgatást két, origón áthaladó, egymással 45° -os szöget bezáró egyenesre való tengelyes tükrözés szorzatával helyettesíthetjük. A két tengely egyenlete: $t_1: y = x$, $t_2: y = 0$. Vagyis az $f(x)$ grafikonját kell transzformálnunk

1) $t_1 \cdot t_2$ -vel, azaz $+90^\circ$ -os O körüli forgatással.

2) $t_2 \cdot t_1$ -gyel, azaz -90° -os O körüli forgatással;

1) Az $y = \log_2(x+4) + 1$ egyenlettel megadott ponthalmazt tükrözve a t_2 -re az $y = -\log_2(x+4) - 1$ egyenlettel megadott ponthalmazt kapjuk. Ezt tükrözve a t_1 -re: $x = -\log_2(y+4) - 1$.



Fejezzük ki az y -t:

$$\begin{aligned}\log_2(y+4) &= -(x+1), \\ 2^{-(x+1)} &= y+4, \\ y &= \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4.\end{aligned}$$

Ez a ponthalmaz a $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjával azonos.

2) Az $y = \log_2(x+4) + 1$ egyenlettel megadott ponthalmazt tükrözve a t_1 -re az $x = \log_2(y+4) + 1$ egyenlettel megadott ponthalmazt kapjuk. Fejezzük ki az y -t:

$$\begin{aligned}x-1 &= \log_2(y+4), \\ y+4 &= 2^{x-1}, \\ y &= 2^{x-1} - 4.\end{aligned}$$

Ezt tükrözzük a t_2 -re:

$$y = -2^{x-1} + 4.$$

Ez a ponthalmaz a $g(x) = -2^{x-1} + 4$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjával azonos.

Megjegyzés: Ezeket a megoldásokat az a) részben alkalmazott módszerekkel is megkaphatjuk.

6. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $\frac{1}{\sqrt{2+x}} - \frac{1}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2};$

b) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \sqrt{2}.$

(16 pont)

Megoldás. a) A feladat értelmezési tartománya: $2+x > 0$ és $2-x > 0$, vagyis $x \in]-2; 2[$.

Mindkét oldalt megszorozva $\sqrt{2+x} \cdot \sqrt{2-x}$ -szel:

$$\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-x^2} = \sqrt{8-2x^2}.$$

Ha $\sqrt{2-x} < \sqrt{2+x}$, akkor nyilván nincs megoldás, hiszen az egyenlet egyik oldala negatív, a másik pedig nemnegatív.

Ha $\sqrt{2-x} \geq \sqrt{2+x}$, vagyis $2-x \geq 2+x$, azaz $-2 < x \leq 0$, akkor négyzetre emeljük az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned}4 - 2\sqrt{4-x^2} &= 2(4-x^2), \\ 0 &= (4-x^2) + \sqrt{4-x^2} - 2, \\ 0 &= (\sqrt{4-x^2})^2 + \sqrt{4-x^2} - 2.\end{aligned}$$

Megoldóképlettel:

$$\sqrt{4-x^2} = 1, \quad \text{valamint} \quad \sqrt{4-x^2} = -2.$$

A $\sqrt{4-x^2}$ negatív nem lehet. A $\sqrt{4-x^2} = 1$ egyenletből kapjuk, hogy $3 = x^2$. A két szám közül csak az $x = -\sqrt{3}$ felel meg a kikötéseknek, így az eredeti egyenletnek is csak ez az egy gyöke van.

b) A feladat értelmezési tartománya: $\sin^2 x \neq 0$ és $\cos^2 x \neq 0$, vagyis $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ -szel:

$$\begin{aligned}\cos^2 x - \sin^2 x &= \sqrt{2} \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x, \\ \cos 2x &= \frac{\sqrt{2} \cdot (2 \cdot \sin x \cdot \cos x)^2}{4} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin^2 2x}{4} = \frac{\sin^2 2x}{2\sqrt{2}}, \\ 2\sqrt{2} \cdot \cos 2x &= 1 - \cos^2 2x, \\ \cos^2 2x + 2\sqrt{2} \cos 2x - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Megoldóképlettel: $\cos 2x = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$ és $\cos 2x = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$. Mivel $\cos 2x \in [-1; 1]$, azért $\cos 2x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Innen $2x \approx +1,25 + k \cdot 2\pi$ és $2x \approx -1,25 + k \cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Vagyis: $x \approx +0,625 + k\pi$ és $x \approx -0,625 + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

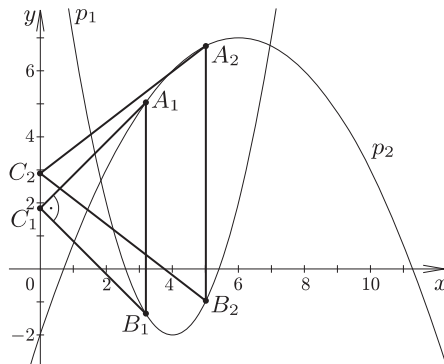
7. A p_2 parabola csúcsa a $C''(6; 7)$ pont, tengelye párhuzamos a $p_1: y = x^2 - 8x + 14$ parabolával, és a $P(9; \frac{19}{4})$ pont illeszkedik a p_2 parabolára.

Az $A_n B_n C_n$ egyenlőszárú háromszögek alapja $A_n B_n$, ahol $A_n \in p_2$, $B_n \in p_1$, és C_n illeszkedik a koordinátarendszer ordinátatengelyére. Az A_n és a B_n pontok abszcisszája egyenlő, és a B_n pontok ordinátája kisebb, mint az A_n pontoké.

a) Határozzuk meg a C_1 pont koordinátáit, ha az $A_1 B_1 C_1$ háromszög derékszögű.

b) Az $A_n B_n C_n$ háromszögek közül melyiknek legnagyobb a területe? (16 pont)

Megoldás. a) A p_2 egy lefelé nyíló parabola: $(x - 6)^2 = -2p(y - 7)$.



Felhasználjuk, hogy $P \in p_2$:

$$\begin{aligned}(9 - 6)^2 &= -2p(4,75 - 7), \\ 9 &= -2p(-2,25) = 4,5p, \\ 2 &= p.\end{aligned}$$

Vagyis p_2 egyenlete: $(x - 6)^2 = -4(y - 7)$, azaz $y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 7$.

A B_n pontok ordinátája kisebb, mint az A_n pontoké, ezért:

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 14 &< -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 7, \\ -4x^2 + 32x - 56 &> x^2 - 12x + 8, \\ 0 &> 5x^2 - 44x + 64, \\ x_1 &\approx 1,84 < x < 6,96 \approx x_2.\end{aligned}$$

Az $A_1 B_1 C_1$ egyenlő szárú háromszög akkor derékszögű, ha B_1 és A_1 ordinátájának különbsége abszcisszájuk kétszeresével egyenlő:

$$\begin{aligned}2x &= -0,25x^2 + 3x - 2 - (x^2 - 8x + 14) = -1,25x^2 + 11x - 16, \\ 0 &= -1,25x^2 + 9x - 16, \\ x_1 &= 3,2, \quad x_2 = 4.\end{aligned}$$

Tehát két ilyen háromszög van (mert mindkettő x eleme az általunk meghatározott intervallumnak):

$$\begin{array}{lll}A_1(3,2; -1,36), & B_1(3,2; 5,04), & C_1(0; 1,84), \\ A'_1(4; -2), & B'_1(4; 6), & C'_1(0; 2).\end{array}$$

b) Ha A_n és B_n abszcisszája x , akkor a háromszög alapja $-1,25x^2 + 11x - 16$, magassága pedig x . Ekkor a terület:

$$t(x) = \frac{x(-1,25x^2 + 11x - 16)}{2} = -0,625x^3 + 5,5x^2 - 8x.$$

$t(x)$ ott lesz maximális, ahol az első deriváltja 0, és pozitívból negatívba vált:

$$\begin{aligned}t'(x) &= -1,875x^2 + 11x - 8 \quad (x \in]1,84; 6,96]), \\ x_1 &\approx 0,85 \quad \text{és} \quad x_2 \approx 5,016.\end{aligned}$$

$t'(x)$ az x_2 -ben pozitívból negatívba vált, tehát itt van a maximum helye a $t(x)$ -nek.

A maximális terület: $t(5,016) \approx 19,376$. Tehát a csúcsok koordinátái (kerekített értékek): $A_2(5,016; 6,758)$, $B_2(5,016; -0,968)$, $C_2(0; 2,895)$.

8. Határozzuk meg az összes olyan $P(x) = ax^2 + bx + c$ egész együtthatós polinomot, melyre $|P(p_1)| = |P(p_2)| = |P(p_3)| = 5$, ahol p_1, p_2, p_3 különböző prímszámok. (16 pont)

Megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy $P(p_i)$ -k közül hány darab negatív előjelű van. A helyettesítési értékek közül csak a 0 vagy az 1 db negatív esetét tárgyaljuk, mert a többi esetben ha $P(x)$ -et $-P(x)$ -re cseréljük, akkor ugyanezekhez az esetekhez jutunk.

1. eset: $P(p_1) = P(p_2) = P(p_3) = 5$. A $P(x) - 5$ polinomnak 3 különböző zérushelye van, de a fokszáma maximum 2, tehát $P_1(x) = 5$ konstans polinom.

2. eset: Az egyik helyettesítési érték negatív, pl. $P(p_1) = -5$. Ekkor $P(p_2) = P(p_3) = 5$. A $P(x) - 5$ polinomnak a p_2 és a p_3 zérushelye, tehát

$$P(x) - 5 = a(x - p_2)(x - p_3).$$

Helyettesítsünk p_1 -et a fenti polinomba:

$$-5 - 5 = a \cdot (p_1 - p_2)(p_1 - p_3).$$

Ha p_i -k páratlan prímszámok, akkor a jobb oldalon álló szorzat osztható négygyel, a bal oldal pedig nem. Tehát a prímekek közül az egyik 2-vel egyenlő.

i) Ha $p_1 = 2$, akkor $p_1 - p_2$ és $p_1 - p_3$ negatív páratlan számok, melyek szorzata pozitív páratlan szám, tehát $a = -2$. Az előbbi két kifejezés szorzata 5, így $p_1 - p_2 = -1$ és $p_1 - p_3 = -5$, azaz $p_2 = 3$ és $p_3 = 7$.

$$P(x) - 5 = -2(x - 3)(x - 7),$$

$$P_2(x) = -2(x - 3)(x - 7) + 5 = -2x^2 + 20x - 37.$$

ii) Ha p_2 vagy p_3 valamelyike 2 (például $p_2 = 2$), ekkor a jobboldali szorzat $p_1 - p_3$ tényezője páros, vagyis $p_1 - p_3$ lehetséges értékei 2, -2, 10, -10 és $p_1 - 2$ pozitív egész szám:

$$\begin{array}{ll} -2 \cdot 5 = a(p_1 - 2) \cdot 2, & -2 \cdot 5 = a(p_1 - 2) \cdot (-2), \\ -5 = a(p_1 - 2), & 5 = a(p_1 - 2), \\ a = -1, \quad p_1 = 7, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 5, & a = 1, \quad p_1 = 7, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 9, \\ a = -5, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 1. & a = 5, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 5. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} -2 \cdot 5 = a(p_1 - 2) \cdot 10, & -2 \cdot 5 = a(p_1 - 2) \cdot (-10), \\ -1 = a(p_1 - 2), & 1 = a(p_1 - 2), \\ a = -1, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = -7. & a = 1, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 13. \end{array}$$

A feladat feltételeinek a következők tesznek eleget:

$$(p_1; p_2; p_3) = (7; 2; 5), \quad (p_1; p_2; p_3) = (3; 2; 5), \quad (p_1; p_2; p_3) = (3; 2; 13).$$

Az így kapott polinomok:

$$P_3(x) = -1(x - 2)(x - 5) + 5 = -x^2 + 7x - 5,$$

$$P_4(x) = 5(x - 2)(x - 5) + 5 = 5x^2 - 35x + 55,$$

$$P_5(x) = 1(x - 2)(x - 13) + 5 = x^2 - 15x + 31.$$

Tehát 10 polinom felel meg a feladatban szereplő feltételeknek: a fent felsorolt 5, és ezek ellentettjei.

9. A nemzetközi sporteseményeken a versenyzőket nem csak a dicsőség hajtja, hanem részben a reklámszerződésekkel járó magas pénzösszegek is. Így nem meglepő, ha a sportolók és az edzők időnként a győzelem megszerzése érdekében nem megengedett eszközöket is alkalmaznak.

A lehetőségek szerinti legtisztességesebb feltételek biztosítása érdekében közvetlenül a fontos versenyek előtt, de a felkészülések során is meghatározott szabályok szerint dopping ellenőrzéseket tartanak. A sportolók vizeletmintát adnak, melyeket lepecsételve és megjelölve, két részben, egy úgynevezett A-próbaként, illetve B-próbaként őriznek meg és vizsgálják.

Miközben a nemzetközi Sportszövetség egyértelmű, minden kétséget kizáró doppingteszt kialakításán fáradozik, addig bizonyos laborok olyan doppingszerek kifejlesztésén dolgoznak, melyek a kontroll során a vizeletből nem mutathatók ki. Az a) feladatrészben abból indulunk ki, hogy egy sportrendezvényen 2400 doppingvizsgálatnak alávetett résztvevőből 60-an egy bizonyos anyaggal doppingoltak. Az összes 2400 A-próbát ellenőrizték.

A tesztre a következő érvényes:

Amennyiben egy sportoló ezzel a szerrel doppingolt, akkor ezt a teszt 85% biztonsággal kimutatja. Ebben az esetben pozitív eredményről beszélünk.

Amennyiben egy sportoló nem használta az említett anyagot, úgy ezt a teszt 96% biztonsággal bizonyítja.

a) Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személyre az A-próba után hibás ítélet született.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A-próba után indokolatlanul vádoltak meg egy sportolót?

c) Mutassuk meg, hogy kisebb, mint 0,08 az esélye annak, hogy a B-próba után is indokolatlanul vádoltak valakit. (16 pont)

Megoldás. *a)* Hibás eredmény született, ha egy doppingolt sportoló tesztje negatívnak, vagy pedig egy nem doppingolt sportolóé pozitívnak bizonyul.

Jelölje D azt az eseményt, hogy egy versenyző doppingolt, T pedig azt, hogy a doppingpróba eredménye pozitív lett.

$$\text{Adott: } P(D) = \frac{60}{2400} = 0,025, \quad P(T | D) = 0,85, \quad P(\bar{T} | \bar{D}) = 0,96 = 0,96.$$

$$\begin{aligned} P(\bar{T}D) + P(T\bar{D}) &= P(\bar{T} | D) \cdot P(D) + P(T | \bar{D}) \cdot P(\bar{D}) = \\ &= (1 - 0,85) \cdot 0,025 + (1 - 0,96)(1 - 0,025) = 0,04275. \end{aligned}$$

Tehát a véletlenszerűen kiválasztott személy esetén kb. 4,3% valószínűséggel hibás eredmény született.

b) Meghatározandó a $P(\bar{D} | T)$.

$$\begin{aligned} P(\bar{D} | T) &= \frac{P(\bar{D}T)}{P(T)} = \frac{P(T | \bar{D}) \cdot P(\bar{D})}{P(T)} = \frac{P(T | \bar{D}) \cdot P(\bar{D})}{P(T | D) \cdot P(D) + P(T | \bar{D}) \cdot P(\bar{D})} = \\ &= \frac{0,04 \cdot 0,975}{0,85 \cdot 0,025 + 0,04 \cdot 0,975} = \frac{0,039}{0,02125 + 0,039} = 0,6473. \end{aligned}$$

A valószínűsége annak, hogy egy doppinggal vádolt sportoló nem doppingolt kb. 65%.

A tört nevezőjéből jól látható, hogy a doppinggal megvádolt sportolók túlnyomó része nem ezzel az (ismeretlen) anyaggal doppingolt. A nem doppingolt sportolók magas aránya eredményezi a teszthibából adódó sok hibás ítéletet.

c) A B-próbára csak abban az esetben kerül sor, ha az A-próba eredménye pozitív. Ebben az esetben a *b)* rész megoldása szerint annak a valószínűsége, hogy valaki nem doppingolt, illetve doppingolt, rendre $P(\bar{D}_B) = 0,6473$, és $P(D_B) = 1 - 0,6473 = 0,3527$.

Úgy, mint a *b)* feladatrészen, az eredmény:

$$P(\bar{D}_B | T_2) = \frac{0,04 \cdot 0,6473}{0,85 \cdot 0,3527 + 0,04 \cdot 0,6473} \approx 0,0795 < 0,08.$$

Simon János