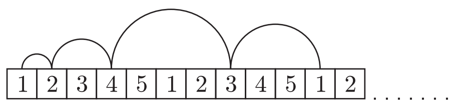
I. rész

1. *Az* ábrán *egy olyan pályát látunk, mely* 2011 db *négyzetből áll. A négyzetekbe számokat írtunk* 1*-től* 5*-ig egymás után a pálya végéig.*

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	....

Az első négyzeten áll egy bábu. Mindig annyit lépünk a bábuval, amennyi azon a négyzeten látható, amelyen a bábu éppen tartózkodik. Számítsuk ki azoknak a számoknak az összegét, amely számokra nem lép rá a bábu, míg a pályán végighalad. (*10 pont*)

Megoldás. Az ábrán a bábu első 4 lépését látjuk. Negyedik lépéskor ismét 1-esre lép, amiből következik, hogy innentől kezdve a lépések periodikusan ismétlődnek.



Ez egyben azt is jelenti, hogy egy periódusban éppen 10 db négyzet szerepel, és minden negyedik lépéssel egy újabb periódus veszi kezdetét. Mivel $2011 = 10 \cdot 201 + 1$, azért 201 periódus szerepel a pályán és az utolsó lépéssel érkezik el a bábu a pálya utolsó négyzetére, ami az eddig elmondottak szerint 1-es.

Egy periódusban (és minden periódusban) a bábu a 3, 5, 1, 2, 4, 5 számokra nem lép rá. Tehát azoknak a számoknak az összege, amelyekre a bábu nem lép rá, amíg eljut a pálya végére:

$$201 \cdot (3 + 5 + 1 + 2 + 4 + 5) = 201 \cdot 20 = 4020.$$

2. *Egy nagy cégnek* 1320 *dolgozója van. A dolgozók* 60%*-a a cég menzáján étkezik. A menzára járók számának és a cég dolgozói számának aránya* $\frac{6}{5}$*-ször akkora, mint a menzára járó férfiak és a cég férfi dolgozóinak aránya. A menzára járó férfiak és a cég férfi dolgozóinak aránya és a menzára járó nők és a cég női dolgozóinak aránya pedig úgy aránylik egymáshoz, mint* $2:3$*. Hány férfi és hány nő dolgozik ennél a cégnél?* (*13 pont*)

Megoldás. Legyen f és n a cég férfi és női dolgozóinak száma, valamint f_m és n_m a menzára járó férfiak és nők száma. A feltételek szerint a menzára járók száma $1320 \cdot 0{,}6 = 792$, tehát $f + n = 1320$ és $f_m + n_m = 792$. Továbbá

$$\frac{792}{1320} = \frac{6}{5} \cdot \frac{f_m}{f}, \quad \text{ahonnan} \quad f = 2f_m, \quad \text{és}$$

$$\frac{\frac{f_m}{f}}{\frac{n_m}{n}} = \frac{2}{3}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n_m}{n}, \quad \text{ahonnan} \quad n = \frac{4}{3}n_m.$$

Ezek szerint $f + n = 1320 = 2f_m + \frac{4}{3}n_m$. Ezt az egyenlőséget így is írhatjuk:

$$1320 = 2f_m + 2n_m - \frac{2}{3}n_m = 2(f_m + n_m) - \frac{2}{3}n_m,$$

$$1320 = 2 \cdot 792 - \frac{2}{3}n_m, \quad \text{azaz} \quad \frac{2}{3}n_m = 264, \quad \text{ahonnan} \quad n_m = 396.$$

Ezzel $f_m = 792 - 396 = 396$.

Tehát a menzára járó férfiak és nők száma egyaránt 396. Ekkor $f = 2f_m = 792$ és $n = \frac{4}{3}n_m = 528$.

Vagyis a férfi dolgozók száma 792, a női dolgozók száma 528.

3. *Egy raktárban* 13 *nagy dobozt tárolnak. E dobozok közül néhányban van* 13-13 db *közepes méretű doboz. A közepes méretű dobozok közül néhányba* 13-13 *kisebb dobozt tettek. Az üres dobozok száma* 205*. Hány doboz van a raktárban?* (*14 pont*)

Megoldás. Legyen a 13 db nagy doboz között k db olyan, melyekbe 13-13 közepes dobozt tettek. Ekkor $13 - k$ db nagy doboz üres.

A $13k$ db közepes doboz között legyen n db olyan, melyekben 13-13 db kis doboz van. Ekkor $13k - n$ db közepes doboz üres és a $13n$ db kis doboz mindegyike szintén üres. Ezek szerint az üres dobozok száma

$$13 - k + 13k - n + 13n = 205, \quad \text{azaz} \quad 12k + 12n = 192, \quad \text{ahonnan} \quad k + n = 16.$$

Az asztalon összesen $13+13k+13n$ db doboz van. Tehát a dobozok száma $13+13k+13n = 13(k+n+1) = 13\cdot 17 = 221$.

4. *Négy dobozba piros és fekete golyókat helyeztünk el az* ábra *szerint* .

1.	2.	3.	4.
5 p; 5 f	10 p; 5 f	7 p; 14 f	14 p; 14 f

Minden dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy-egy golyót. Igazoljuk, hogy annak a valószínűsége, hogy mind a négy kivett golyó piros, ugyanannyi, mint annak a valószínűsége, hogy mind a négy golyó fekete. (*14 pont*)

Megoldás.

Annak a valószínűsége, hogy az első dobozból pirosat húzunk $\frac{1}{2}$, annak a valószínűsége, hogy a második dobozból pirosat húzunk $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, annak, hogy a harmadik dobozból pirosat húzunk $\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$, végül, hogy a negyedik dobozból pirosat húzunk $\frac{1}{2}$. Tehát annak a valószínűsége, hogy mind a 4 dobozból pirosat húzunk:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}.$$

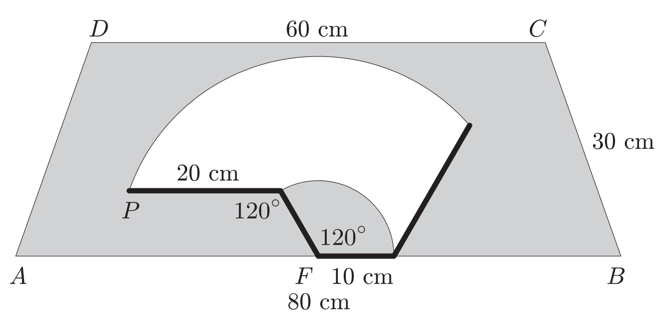
Annak a valószínűsége, hogy a dobozokból feketét húzunk rendre: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$. Tehát annak a valószínűsége, hogy mind a négy dobozból feketét húzunk:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}.$$

A két valószínűség valóban egyenlő.

II. rész

5. *Az* ábrán *egy autó hátsó szélvédőjét és annak ablaktörlőjét látjuk. Ez egy* 10 cm-*es és egy* 20 cm-*es, egymáshoz* 120°-*os szögben csatlakozó kar, melynek* 10 cm-*es darabja a hajtókar,* 20 cm-*es darabja a gumilapát. A hajtókar a szimmetrikus trapéz alakú hátsó ablak hosszabbik alapjának F felezőpontja körül tud elfordulni* 120°-*os szögben. (A hátsó ablakot tekintsük síkbeli alakzatnak.)*

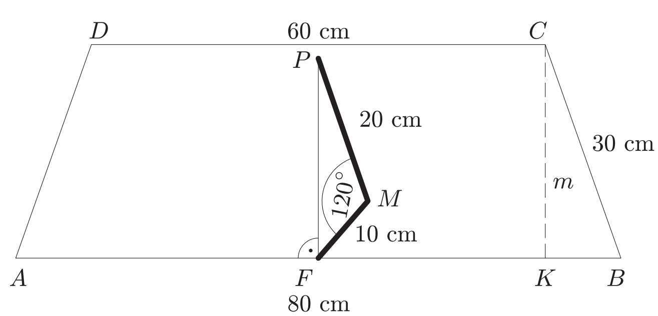


a) Milyen távol van a gumilapát P végpontja az ablak CD oldalától, amikor a legközelebb van hozzá?
b) Hány százalékát törli le a gumilapát a hátsó ablaknak?

Megoldás. *a*) Az ablaktörlő gumilapát P végpontja akkor van legközelebb az ablak CD oldalához, amikor az FP egyenes merőleges az alapokra. A keresett távolság a trapéz m magasságának és az FP szakasznak a különbsége.

A trapéz magasságát a BCK derékszögű háromszögből kapjuk Pitagorasz-tétel segítségével. Mivel

$$BK=\frac{80-60}{2}=10\text{ cm},\quad\text{így}\quad m=\sqrt{30^2-10^2}=\sqrt{800}\approx 28{,}28\text{ cm}.$$



Az FP szakasz hosszát koszinusztétellel számíthatjuk ki:

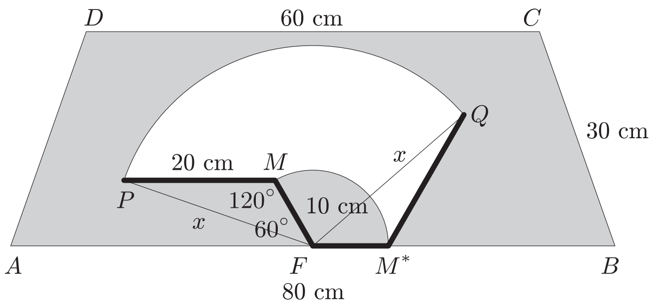
$$FP^2 = FM^2 + MP^2 - 2 \cdot FM \cdot MP \cdot \cos 120^\circ = 700, \quad FP = \sqrt{700} = 26{,}46 \text{ cm}.$$

Tehát az ablaktörlő gumilapát végpontjának a felső CD oldaltól való legkisebb távolsága $28{,}28 - 26{,}46 = 1{,}82$ cm.

b) A trapéz területe:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{(80+60) \cdot 28{,}28}{2} = 1979{,}6 \text{ cm}^2.$$

A lapát által letörölt T_{tiszta} területet az alábbi gondolatmenettel számíthatjuk ki.



Először kiszámítjuk az F középpontú, $PF = x$ sugarú PFQ körcikk területét, ehhez hozzáadjuk az FM^*Q háromszög területét, majd az összegből levonjuk a PFM háromszög és az MFM^* körcikk területét:

$$T_{\text{tiszta}} = T_{PFQ\ \text{körcikk}} + T_{FM^*Q} - T_{PFM} - T_{MFM^*\ \text{körcikk}}.$$

Az FM^*Q és PFM háromszögek nyilvánvalóan egybevágó háromszögek, így

$$T_{\text{tiszta}} = T_{PFQ\ \text{körcikk}} - T_{MFM^*\ \text{körcikk}}.$$

Az x szakaszt a PMF háromszögből kapjuk koszinusztétellel:

$$x^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 120^\circ,$$

$$x^2 = 500 + 200 = 700, \quad \text{ahonnan} \quad x = 10\sqrt{7}.$$

Mivel $PFQ\sphericalangle = 120^\circ$, azért

$$T_{PFQ\ \text{körcikk}} = \frac{\left(10\sqrt{7}\right)^2 \cdot \pi}{360} \cdot 120 = \frac{700\pi}{3} \approx 733 \text{ cm}^2.$$

Az MFM^* körcikk területe:

$$T_{MFM^*\ \text{körcikk}} = \frac{10^2\pi}{360} \cdot 120 = \frac{100\pi}{3} \approx 104{,}7 \text{ cm}^2.$$

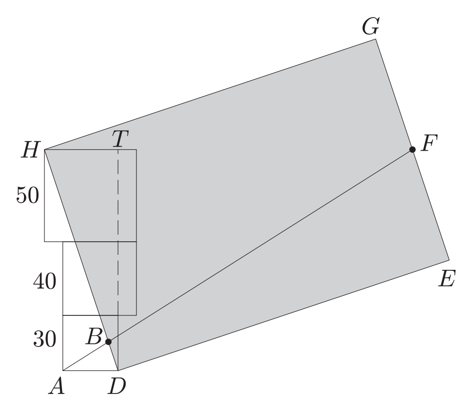
Tehát az ablaktörlő által tisztított terület nagysága: $733 - 104{,}7 = 628{,}3$ cm^2.

Vagyis a gumilapát a hátsó szélvédő területének kb. $\dfrac{628{,}3}{1979{,}6} \cdot 100 \approx 31{,}7\%$-át törli le.

6. *Az* ábrán *egy építendő háztömb és a hozzá tartozó mélygarázs alaprajzát látjuk. A háztömb alaprajza három egymás mellé helyezett négyzet, melyek oldalai:* 50 m, 40 m *és* 30 m. *A mélygarázs alakja egy olyan $DEGH$ téglalap, melynek hosszabbik DE oldala a rövidebb oldalának másfélszerese.*

a) *Mekkora a mélygarázs területe?*

b) *A garázs kocsibejárója az EG oldal F felezőpontjában lesz. A háztömb A csúcsánál lesz egy lejárat a pincébe, ahonnan a B pontnál egy ajtón át lehet kijutni a mélygarázsba. Milyen hosszú a BF szakasz?* (*16 pont*)

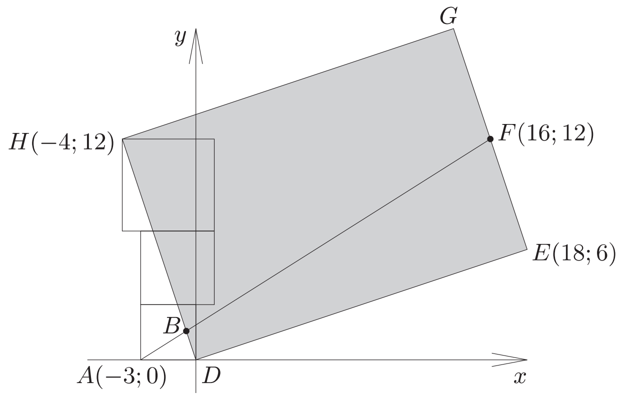


Megoldás. *a*) A téglalap HD oldalát a HTD derékszögű háromszögből számíthatjuk ki a Pitagorasz-tétel segítségével. A háromszög egyik befogója $50+40+30=120$ m, másik befogója 40 m, tehát

$$HD^2=120^2+40^2=16\,000, \quad \text{ahonnan} \quad HD=40\sqrt{10}\,.$$

A téglalap másik oldala ennek másfélszerese, vagyis $DE=60\sqrt{10}$. Ezek szerint a mélygarázs területe: $40\sqrt{10}\cdot 60\sqrt{10}=24\,000\ \mathrm{m}^2$.

b) Helyezzük el az *ábrát* egy alkalmasan választott koordinátarendszerben; legyen az egység mindkét tengelyen 10 m. Az E pont koordinátáit megkapjuk, ha a $\overrightarrow{DH}(-4;12)$ vektor $-90°$-os elforgatottját megszorozzuk 1,5-del. Ezzel az E pont $E(18;6)$. Az F pont koordinátáit pedig megkapjuk, ha a $\overrightarrow{DE}$ vektorhoz hozzáadjuk az $\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$ vektort. Így $F(16;12)$.



Ezek után írjuk fel a DH és AF egyenesek egyenletét, majd számítsuk ki ezek B metszéspontját. A megfelelő pontok koordinátáiból a DH egyenes egyenlete: $y=-3x$, az AF egyenes egyenlete: $12x-19y=-36$. A két egyenes metszéspontjának koordinátái $B\left(-\frac{12}{23};\frac{36}{23}\right)$. Ezzel a B és F pontok távolsága:

$$BF=\sqrt{\left(\frac{380}{23}\right)^2+\left(\frac{240}{23}\right)^2}\approx 19{,}54, \quad \text{azaz} \quad 195{,}4\ \text{m}.$$

7. *Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=x^2+bx+c$ függvény. A függvényérték valamely k valós számra $f(k)=190{,}1$. Számítsuk ki az alábbi összeget:*

$$f(k-1)+f(k+1)+f(k-2)+f(k+2)+\ldots+$$
$$+f(k-5)+f(k+5).$$

(16 pont)

Megoldás. Írjuk ki részletesen az $f(k-i)+f(k+i)$ tagokat, ahol $f(x)=x^2+bx+c$, $f(k)=190{,}1$ és $i=1,2,3,4,5$.

$$\begin{aligned} f(k-i)+f(k+i)&=(k-i)^2+b(k-i)+c+(k+i)^2+b(k+i)+c=\\ &=k^2-2ki+i^2+bk-bi+c+k^2+2ki+i^2+bk+bi+c=\\ &=2k^2+2bk+2c+2i^2=2\big(k^2+bk+c\big)+2i^2. \end{aligned}$$

A zárójelben éppen $f(k)$ szerepel, így

$$f(k-i)+f(k+i)=2\cdot f(k)+2i^2.$$

Ezek szerint az alábbi összeget kell kiszámítanunk:

$$2\cdot f(k)+2\cdot 1^2+2\cdot f(k)+2\cdot 2^2+2\cdot f(k)+2\cdot 3^2+2\cdot f(k)+2\cdot 4^2+2\cdot f(k)+2\cdot 5^2.$$

Vagyis a keresett összeg:

$$10\cdot f(k)+2\cdot\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\right)=10\cdot 190{,}1+2\cdot 55=1901+110=2011.$$

8. *a*) *Oldjuk meg a* $\sqrt{\log^2_{\frac{1}{2}}x-10\log_{\frac{1}{2}}x+25}\geq 1$ *egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.*

b) *Legyen* $0 \le x \le 5$. *Igazoljuk, hogy ekkor*

$$\sqrt{-x^2-2x+35}+\sqrt{x+20-x^2} \le 10{,}5. \qquad (\textit{16 pont})$$

Megoldás. *a*) A megoldandó egyenlőtlenségnek a benne szereplő logaritmusok miatt csak akkor van értelme, ha $x>0$. A négyzetgyök alatt teljes négyzet szerepel:

$$\sqrt{\left(\log_{\frac{1}{2}} x-5\right)^2} \ge 1, \quad \text{azaz} \quad \left|\log_{\frac{1}{2}} x-5\right| \ge 1.$$

Ez azt jelenti, hogy $\log_{\frac{1}{2}} x-5 \ge 1$ vagy $\log_{\frac{1}{2}} x-5 \le -1$.

Első esetben:

$$\log_{\frac{1}{2}} x \ge 6 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

Mivel az $\log_{\frac{1}{2}} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, azért $x \le \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

A második esetben

$$\log_{\frac{1}{2}} x \le 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Innen, az $\log_{\frac{1}{2}} x$ függvény előbb említett tulajdonsága miatt $x \ge \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

A két esetet egybevetve az eredeti egyenlőtlenség megoldásai:

$$0 < x \le \frac{1}{64}, \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{16} \le x.$$

b) Bontsuk fel a négyzetgyökök alatt szereplő másodfokú kifejezéseket elsőfokúak szorzatára. Ehhez először ki kell számítanunk a másodfokú kifejezések zérushelyeit. Az első négyzetgyök alatti kifejezésre

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+140}}{-2} = \frac{2 \pm 12}{-2}, \quad x_1=-7, \quad x_2=5.$$

A második négyzetgyök alatti kifejezésre

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{-2} = \frac{-1 \pm 9}{-2}, \quad x_1=-4, \quad x_2=5.$$

A kapott gyökökkel a megadott kifejezés így írható:

$$\sqrt{-(x+7)(x-5)}+\sqrt{-(x+4)(x-5)} \le 10{,}5,$$

vagy másképpen:

$$\sqrt{(x+7)(5-x)}+\sqrt{(x+4)(5-x)} \le 10{,}5.$$

Mivel $0 \le x \le 5$, azért mindkét négyzetgyök alatt nem negatív mennyiség szerepel. Alkalmazzuk mindkét tagra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Eszerint:

$$\sqrt{(x+7)(5-x)} \le \frac{x+7+5-x}{2} = \frac{12}{2} = 6,$$

valamint

$$\sqrt{(x+4)(5-x)} \le \frac{x+4+5-x}{2} = \frac{9}{2}.$$

E két egyenlőséget összeadva kapjuk a bizonyítandó állítást:

$$\sqrt{(x+7)(5-x)}+\sqrt{(x+2)(5-x)} \le 6+\frac{9}{2} = 10{,}5.$$

9. *Adott a valós számok halmazán értelmezett függvénysereg*:

$$f(x) = x^3+(a-1)x^2-(2a+2)x+a-4.$$

a) *Bizonyítsuk be, hogy ha* a *egész szám, akkor* $f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$ *osztható* 6*-tal.*

b) *Határozzuk meg a függvény zérushelyeit, ha* $a=4$.

c) *Valamely* a*-ra a függvény* $x=2$ *helyhez tartozó érintője áthalad az origón. Írjuk fel az érintő egyenletét.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*)

$$\begin{aligned}
f(-1) &= -1 + a - 1 + 2a + 2 + a - 4 = 4a - 4;\\
f(0) &= a - 4,\\
f(1) &= 1 + a - 1 - 2a - 2 + a - 4 = -6,\\
f(2) &= 8 + 4a - 4 - 4a - 4 + a - 4 = a - 4.
\end{aligned}$$

Tehát

$$f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 4a - 4 + a - 4 + -6 + a - 4 = 6a - 18.$$

Ez pedig osztható 6-tal, ha a egész szám.

b) Ha $a = 4$, akkor $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$, azaz $f(x) = x\big(x^2 + 3x - 10\big)$. A függvény zérushelyei: $x_1 = 0$, valamint az $x^2 + 3x - 10 = 0$ egyenlet gyökei, tehát $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -5$.

c) Ha $x = 2$, akkor $f(2) = a - 4$. Tehát az érintő érintési pontja $P(2; a - 4)$. Az érintő m meredeksége a függvény deriváltja az $x = 2$ helyen:

$$f'(x) = 3x^2 + 2(a-1)x - 2a - 2, \quad \text{tehát} \quad m = f'(2) = 12 + 4a - 4 - 2a - 2 = 2a + 6.$$

Ezek szerint az érintő egyenlete: $y - a + 4 = (2a + 6)(x - 2)$. Ez az érintő áthalad az origón, tehát: $-a + 4 = -4a - 12$, ahonnan $a = -\dfrac{16}{3}$. Ezzel az érintő egyenlete:

$$y + \frac{16}{3} + 4 = \left(6 - \frac{32}{3}\right)(x - 2), \quad \text{azaz} \quad y = -\frac{14}{3}x.$$