I. rész

1. Egy általános iskolában a farsangi tombolán összesen 210 tombolaszelvényt adtak el, ezek közül hármat vett meg Bori. A sorsoláson összesen 20 nyertes szelvényt húznak ki, melyek közül az utolsónak a tulajdonosa kapja meg a főnyereményt.

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy

a) Bori legalább az egyik szelvénnyel nyer;

b) Bori mindhárom szelvénnyel nyer;

c) Bori nyeri a főnyereményt. (*12 pont*)

2. Legyen P olyan pont a derékszögű koordináta-rendszerben, hogy a P-ből az $x^2+y^2=6y-6$ és az $x^2+y^2=2x$ egyenletű körökhöz húzott érintőknek P-től az érintési pontokig terjedő szakaszai mind ugyanakkorák. Igazoljuk, hogy az említett tulajdonsággal rendelkező P pontok halmaza egy egyenes. Írjuk fel ennek az egyenesnek az egyenletét. (*13 pont*)

3. Határozzuk meg az

$$f(x)=3x^2+px+q$$

hozzárendeléssel megadott függvényben a p és a q paraméterek értékét, ha

$$\int_1^3 f(x)\,dx=13 \quad \text{és} \quad \int_2^4 f(x)\,dx=35.$$

(*12 pont*)

4. *a*) Határozzuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$x \mapsto \frac{\sin 2x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$$

hozzárendeléssel megadott függvény értelmezhető és ezen az értelmezési tartományon adjuk meg a függvény értékkészletét. Ábrázoljuk a függvényt a $[-2\pi;2\pi]$ intervallumon.

b) Oldjuk meg a

$$\frac{\sin 2x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=2\cos 2x$$

egyenletet a valós számok halmazán. (*14 pont*)

II. rész

5. Egy egységnyi oldalú szabályos háromszög oldalait (azonos körüljárási irány szerint) felosztottuk $m:n$ arányban, és az osztópontokat összekötve újabb háromszöget kaptunk. Ezt az eljárást gondolatban végtelen sokszor megismételjük a kapott háromszögek mindegyikével. A keletkezett háromszögek területének összege az eredeti háromszög területének $\frac{19}{30}$-szorosa. Határozzuk meg az $m:n$ arányt.

(*16 pont*)

6. *a*) Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy $16\cdot 25^x$, $133\cdot 10^x$ és $250\cdot 4^x$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő elemei legyenek.

b) Egy számtani sorozat első eleme 16, differenciája 117. A sorozat első n elemének összege 371 000. Határozzuk meg n értékét. (*16 pont*)

7. Egy ötoldalú szabályos gúla minden éle egyenlő.

a) Mekkora szöget zárnak be a szomszédos oldallapok?

b) Mekkora szöget zár be egy oldalél az alaplappal?

c) Egy ólomból készített papírnehezék alakja éppen ilyen szabályos ötoldalú gúla, melynek minden éle 1,5 cm hosszúságú. Hány darab papírnehezék önthető 1,5 kg ólomból, ha a művelet során a tapasztalatok szerint 9% veszteséggel kell számolnunk? (Az ólom sűrűsége 11,3 g/cm^3.) (*16 pont*)

8. Bergengócia legnagyobb tavának négy üdülővárosát hajójáratokkal szeretnék összekötni. Minden járat közvetlenül két települést köt össze úgy, hogy közben harmadik várost nem érint (a járatok oda-vissza közlekednek). A hálózatban működő járatok száma 0-tól 6-ig bármennyi lehet.

a) Hány különböző járathálózat alakítható ki? (Két hálózat akkor különböző, ha van legalább egy olyan járat, mely az egyik hálózatban közlekedik, a másikban nem.)

b) Az összes lehetséges járathálózat hányadrésze lesz összefüggő? (Egy hálózat akkor összefüggő, ha – szükség esetén átszállással – bármely városból bármely másik városba el lehet jutni.)

c) Takarékossági okokból végül úgy döntenek, hogy a lehető legkevesebb járatot indítják el ahhoz, hogy a hálózat még összefüggő legyen. Hány különböző járathálózat alakítható így ki? (*16 pont*)

9. Murmur úr telkét a szomszéd telkétől egy 180 cm magas kerítés választja el. Milyen szögben kell a kerítéshez támasztania a 390 cm magas paravánját, ha azt szeretné, hogy az a szomszéd kertjére a lehető legnagyobb árnyékot vesse, feltéve, hogy a Nap éppen függőlegesen süt? Hány méterre nyúlik be a szomszéd telkére ez az árnyék? (*16 pont*)