

Megoldásvázlatok a 2012/2. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. Amikor Jancsi célba ért a mezei futóversenyen, akkor a helyszíni riporter megkérdezte tőle, hogy hányadik helyen végzett. Jancsi így válaszolt: „Ha az előttem végzők fele mögöttem végzett volna, akkor mögöttem ötször annyian lettek volna, mint előttem. Ha viszont a mögöttem befutók harmada előttem végzett volna, akkor 6-tal többen végeztek volna előttem, mint mögöttem.”

Hány résztvevője volt a futóversenynek és hányadik helyen végzett Jancsi? (12 pont)

Megoldás. Legyen x a Jancsi előtt, és y a mögöttem végzetek száma. Ekkor az első feltétel alapján:

$$y + \frac{x}{2} = 5 \cdot \left(x - \frac{x}{2}\right), \quad \text{azaz} \quad y = 2x.$$

A második feltétel alapján:

$$y - \frac{y}{3} = x + \frac{y}{3} - 6, \quad \text{azaz} \quad \frac{y}{3} = x - 6.$$

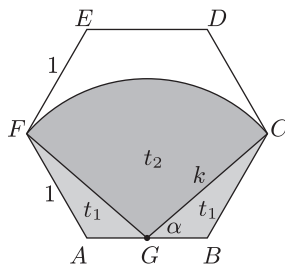
A két egyenletből kapjuk, hogy

$$\frac{2x}{3} = x - 6, \quad \text{vagyis} \quad x = 18.$$

Ezek szerint Jancsi előtt 18-an, mögöttem 36-an végeztek. A versenyen résztvevők száma $18 + 1 + 36 = 55$. Jancsi a 19. helyen végzett.

2. Egy szabályos hatszög alakú rét egyik oldalának felezőpontjába szúrt karóhoz kikötöttünk egy kecskét. Hány százalékát legelheti le a kecske a rétnak, ha feszes kötél esetén pont el tud jutni a két szomszédos oldal távolabbi végpontjába? (12 pont)

Megoldás. Legyen az $ABCDEF$ szabályos hatszög egységnyi oldalú. Ekkor területe:



A kecske által elérhető területet két egybevágó háromszög és egy körcikk alkotja. Az AGF és a BGC háromszögek t_1 területe a trigonometrikus területképlet alapján:

$$t_1 = \frac{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Az AGF háromszögre a koszinusztételt alkalmazva:

$$k^2 = 1 + \frac{1}{4} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 120^\circ = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}, \quad \text{ahonnan} \quad k = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Az AGF háromszögben a szinusztételből:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad \text{tehát} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \text{ahonnan} \quad \alpha \approx 40,9^\circ.$$

Ezek szerint a körcikk FGC középponti szöge: $FGC = 180^\circ - 2 \cdot 40,9^\circ = 98,2^\circ$. Vagyis a körcikk t_2 területe:

$$t_2 = \frac{k^2 \pi}{360} \cdot 98,2 \approx 1,5.$$

A kecske által elérhető rész T területe:

$$T = 2t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 1,5 \approx 1,933.$$

Tehát a kecske a rét $\frac{1,933}{2,598} \cdot 100 \approx 0,744$ -ed részét, azaz 74,4%-át tudja lelegelni.

3. Legyen az A halmaz az első n pozitív egész számot tartalmazó halmaz. Legyen az A halmaz a 3-mal osztható, a B halmaz a 4-gyel osztható, a C halmaz pedig az 5-tel osztható számok halmaza.

a) Véletlenszerűen kiválasztva egy számot, mekkora annak a valószínűsége, hogy az a megadott három halmaz egyikének sem eleme, ha $n = 100$?

b) Ha az $A \cap B \cap C$ halmaznak 2 eleme van, akkor hány eleme lehet az $(A \cap B) \setminus C$ halmaznak? (13 pont)

Megoldás. a) Az $A \cap B \cap C$ halmaznak csak 1 darab eleme van (ez a 60). Legyen az $A \cap B$ elemeinek száma x , a $B \cap C$ elemeinek száma y , az $A \cap C$ elemeinek száma pedig z .

Az A halmaz elemei a 100-nál nem nagyobb 3-mal osztható pozitív egész számok. Ezek egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, melynek első tagja 3, utolsó tagja 99, differenciája 3, tehát $99 = 3 + (n-1) \cdot 3$, ahonnan $n = 33$. Tehát az A halmaznak 33 eleme van.

Hasonlóképpen kapjuk, hogy a B halmaznak 25, a C halmaznak pedig 20 eleme van. Ezek szerint a felhasznált számok száma:

$$33 + 25 + 20 - (x + y + z) + 1.$$

Az $A \cap B$ halmazba a 12-vel osztható számok tartoznak:

$$A \cap B = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\}.$$

Tehát ennek a halmaznak 8 eleme van, azaz $x = 8$.

A $B \cap C$ halmazba a 20-szal osztható számok tartoznak:

$$B \cap C = \{20, 40, 60, 80, 100\}.$$

Tehát ennek a halmaznak 5 eleme van, azaz $y = 5$.

A $A \cap C$ halmazba a 15-tel osztható számok tartoznak:

$$A \cap C = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}.$$

Tehát ennek a halmaznak 6 eleme van, azaz $z = 6$.

Ezek szerint a felhasznált számok száma: $33 + 25 + 20 - (8 + 5 + 6) + 1 = 60$. Így azon számok száma, melyeket egyetlen halmazba sem soroltunk be, 40.

A keresett valószínűség: $\frac{40}{100} = 0,4$.

b) Ha az $A \cap B \cap C$ halmaznak 2 eleme van, akkor azok csak a 60 és a 120 lehetnek. Az $(A \cap B) \setminus C$ halmazba a 12-vel osztható, 180-nál kisebb, n -nél nem nagyobb, pozitív egész számok tartoznak, kivéve a 60-at és a 120-at. Ezek szerint: $12 \leq 12k < 180$, ahol k egész szám, de $k \neq 5$, $k \neq 10$. A k lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 (ezek mindenképpen), 11, 12, 13, 14 (ezek az n értékétől függően). Vagyis az $(A \cap B) \setminus C$ halmaz elemeinek száma 8, 9, 10, 11 vagy 12 lehet.

4. A MÁV statisztikai adatai szerint az utazók 8%-a bliccel (azaz érvényes jegy nélkül utazik).

a) Egy vagonban 24 utas tartózkodik. Mekkora annak az esélye, hogy a jegyellenőr talál bliccelőt a vagonban?

b) Hány utas esetén lesz legalább 90% annak az esélye, hogy a jegyellenőr talál bliccelőt a vagonban? (14 pont)

Megoldás. a) Annak a valószínűsége, hogy egy utas bliccel, 0,08, így annak a valószínűsége, hogy egy utasnak van érvényes jegye, 0,92. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a jegyellenőr nem talál bliccelőt. Ennek valószínűsége: $0,92^{24} \approx 0,1352$. Annak a valószínűsége, hogy a 24 utas között találunk bliccelőt: $1 - 0,1352 = 0,8648$.

Tehát kb. 86,5% annak az esélye, hogy a 24 utas között találunk bliccelőt.

b) Ha annak az esélye legalább 90%, hogy az ellenőr talál bliccelőt a vagonban, az egyben azt is jelenti, hogy annak az esélye, hogy nem talál bliccelőt, 10%-nál kisebb. Ha ez n utasra teljesül, akkor $0,92^n < 0,1$.

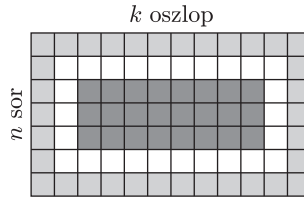
Vegyük az egyenlőtlenség mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát: $\lg 0,92^n < \lg 0,1$, azaz $n \cdot \lg 0,92 < \lg 0,1$. Mivel $\lg 0,92 < 0$, azért

$$n > \frac{\lg 0,1}{\lg 0,92} \approx 27,62.$$

Tehát ha $n \geq 28$, akkor már legalább 90% annak az esélye, hogy az ellenőr talál bliccelőt a vagonban.

II. rész

5. Egy egységnyi négyzetekből álló négyzetrács n sorból és k oszlopból áll. A négyzetrács szélével érintkező négyzetek száma (az ábrán világosszürke), a négyzetrács szélével érintkező négyzetekkel érintkező négyzetek száma (az ábrán fehér), és a négyzetrács belsejében levő négyzetek száma (az ábrán sötétszürke) egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Határozzuk meg n és k értékét. (16 pont)



Megoldás. A feltételekből következik, hogy $n > 4$ és $k > 4$. A négyzetrács szélén levő négyzetek száma: $a_1 = 2k + 2n - 4$. A szélével érintkező négyzetekkel érintkező négyzetek száma: $a_2 = 2(k - 2) + 2(n - 2) - 4 = 2k + 2n - 12$. Az összes többi négyzetek száma: $a_3 = (k - 4)(n - 4)$.

A számtani sorozat differenciája: $a_2 - a_1 = -8$. Ezek szerint:

$$a_3 - a_2 = (k - 4)(n - 4) - 2k - 2n + 12 = -8,$$

azaz $kn - 6n - 6k + 36 = 0$, ahonnan $(k - 6)(n - 6) = 0$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $k = 6$ vagy $n = 6$.

Ezek szerint a feladat feltételei akkor teljesülnek, ha a négyzetrács valamelyik oldala 6, a másik pedig tetszőleges, 4-nél nagyobb pozitív egész szám.

6. Milyen pozitív egész n -re teljesül, hogy a $\frac{3\sqrt{n} + \sqrt{3}}{4\sqrt{3} - \sqrt{n}}$ tört értéke pozitív egész szám?

(16 pont)

Megoldás. Legyen k az a pozitív egész szám, melyre

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{n} + \sqrt{3}}{4\sqrt{3} - \sqrt{n}} &= k, \quad \text{azaz} \\ 3\sqrt{n} + \sqrt{3} &= 4k\sqrt{3} - k\sqrt{n}, \\ \sqrt{n} \cdot (3 + k) &= \sqrt{3} \cdot (4k - 1), \\ \frac{4k - 1}{3 + k} &= \sqrt{\frac{n}{3}}. \end{aligned}$$

A bal oldalon egy racionális szám szerepel. A jobb oldal akkor és csak akkor lesz racionális, ha a négyzetgyök alatt egy racionális szám négyzete szerepel, azaz $n = 3r^2$ alakú, ahol r egy pozitív egész szám. Ekkor $\frac{4k - 1}{3 + k} = r$. Alakítsuk át a bal oldalt a következő módon:

$$\frac{4k - 1}{3 + k} = \frac{4k + 12 - 13}{3 + k} = \frac{4k + 12}{3 + k} - \frac{13}{3 + k} = 4 - \frac{13}{3 + k}.$$

Ez akkor és csak akkor lesz egész szám, ha $3 + k$ osztója 13-nak, azaz $3 + k = 1, -1, 13$ vagy -13 . Ezen esetek közül csak $3 + k = 13$ esetén adódik k -ra pozitív egész érték. Vagyis $k = 10$. Ezzel $\frac{39}{13} = \sqrt{\frac{n}{3}}$, ahonnan $n = 27$.

7. A Budapest–Zürich nemzetközi gyorsvonal szerelvénye 12 vagonból áll: 4 db 1. osztályú, 6 db 2. osztályú vagon, valamint egy étkezőkocsi és egy poggyászkocsi.

a) Hányféleképpen alakulhat a kocsik sorrendje oly módon, hogy az 1. osztályú kocsik is és a 2. osztályú kocsik is egymás mögött legyenek, és az étkezőkocsi ne legyen a szerelvény utolsó vagonja?

b) Az egyik vagonban 8 tudós utazott, akik közül néhányan már ismerték egymást. Az egyik tudós (legyen a neve A) mindenkit ismert a társaságból. Három olyan tudós volt közöttük, akik A -n kívül senki mást nem ismertek, míg a többi négy ismerte egymást. Kézfogással bemutatkoztak azok, akik nem ismerték egymást. Hány kézfogás történt? (16 pont)

Megoldás. a) A 4-féle kocsit (étkező-, poggyász-, 1. osztályú, 2. osztályú kocsi) 4!-féleképpen rakhatjuk sorba. E permutációk bármelyike $6! \cdot 4!$ -féleképpen valósulhat meg, hiszen az 1. osztályú kocsikat 4!-féleképpen, a 2. osztályú kocsikat pedig 6!-féleképpen állíthatjuk sorba.

Ezek szerint a sorbarendezések száma: $4! \cdot 4! \cdot 6!$. Ebből viszont még le kell vonnunk azokat az eseteket, amikor az étkezőkocsi a szerelvény utolsó vagonja. Ez összesen $3! \cdot 4! \cdot 6!$ -féleképpen lehetséges.

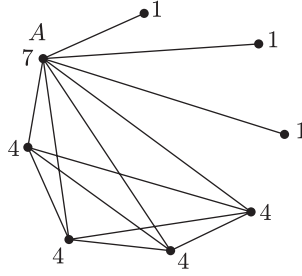
Tehát minden feltételt figyelembe véve a vagonok sorrendjének a száma:

$$4! \cdot 4! \cdot 6! - 3! \cdot 4! \cdot 6! = 3! \cdot 4! \cdot 6! \cdot (4 - 1) = 311\,040.$$

b) Szemléltessük egy *gráffal* az ismeretségeket. Írjuk a gráf minden csúcsa mellé a foksámát. Az A tudósnak megfelelő csúcs fokszáma 7. Mivel 3 olyan személy van, akik A -n kívül senkit sem ismernek, azért e három csúcs fokszáma 1. A további négy személy tagjai kölcsönösen ismerik egymást, ezért a nekik megfelelő csúcsok fokszáma 4.

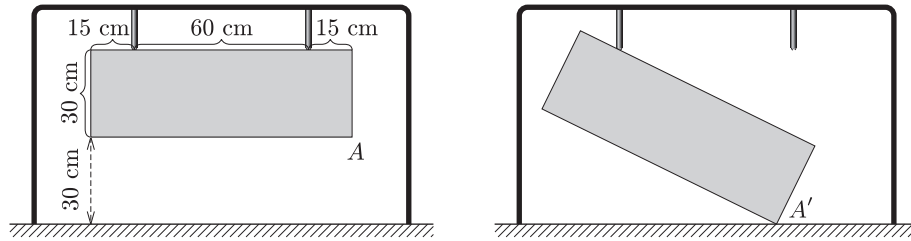
Ezek szerint a foksámok összege:

$$7 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4 + 4 = 26.$$



Mivel a gráf éleinek száma a foksámok összegének a fele, azért a gráfnak 13 éle van. A kézfogások száma a hiányzó élek számával egyenlő. Mivel a 8 pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ és a gráfnak 13 éle van, azért a hiányzó élek (vagyis a kézfogások) száma $28 - 13 = 15$.

8. Egy étterem bejárata előtt, vízszintes talajon egy fémkeretre függőleges rudakat hegesztettek, majd a rudakra csavarozott táblán hirdették a napi menüt. Egy idő után az egyik csapágý eltört (lásd *ábra*), és így a tábla a földre billent.

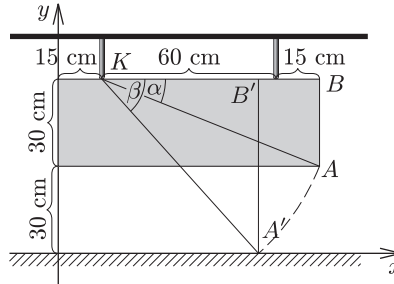


a) Határozzuk meg a tábla A csúcspontjának billenés utáni A' helyzetét a földön.

b) Hány fokkal fordult el a tábla a billenés következtében?

(16 pont)

Megoldás. a) Helyezzük el az *ábrát* egy koordinátarendszerbe. Legyen az x tengely a talaj, az y tengely pedig illeszkedjen a tábla bal oldali, függőleges széléhez. Billenéskor a tábla az épen maradt rúd K végpontja körül forog. Így az A pont egy olyan kör mentén forog, melynek középpontja K , sugara pedig a KA szakasz hossza. Ami a valóságban 10 cm, az a koordinátarendszerben legyen 1 egység. Vagyis $K(1,5;6)$, a kör sugara: $AK = \sqrt{7,5^2 + 3^2} = \sqrt{65,25}$.



A kör egyenlete:

$$(x - 1,5)^2 + (y - 6)^2 = 65,25.$$

Az A' pont a körnek az x tengellyel való metszéspontja. Ezt megkapjuk, ha a kör egyenletébe $y = 0$ -t helyettesítünk. Ekkor

$$(x - 1,5)^2 + 36 = 65,25, \quad \text{azaz} \quad (x - 1,5)^2 = 29,25,$$

$$x - 1,5 = \sqrt{29,25}, \quad \text{vagy} \quad x - 1,5 = -\sqrt{29,25}.$$

Innen: $x_1 = 1,5 + \sqrt{29,25} \approx 6,9$, $x_2 \approx -3,9$. A negatív gyök nyilván érdektelen, így azt kaptuk, hogy $x \approx 6,9$.

Tehát az A' pont a földön az eredetileg még ép tábla bal oldali függőleges egyenesétől kb. 69 cm-re van.

b) Billenéskor az elfordulás szöge az *ábrán* az $AKA' \sphericalangle = BKA' \sphericalangle - BKA \sphericalangle = \beta - \alpha$. α értékét a BKA derékszögű háromszögből kaphatjuk meg (most már cm-ekben számolva):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{BK} = \frac{30}{75} = 0,38, \quad \text{ahonnan} \quad \alpha \approx 21,8^\circ.$$

A' vetülete KB -re legyen B' . Így β értékét az $B'KA'$ derékszögű háromszögből kaphatjuk meg:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A'B'}{B'K} = \frac{60}{69 - 15} = \frac{60}{54} \approx 0,84, \quad \text{ahonnan} \quad \beta \approx 48^\circ.$$

Tehát a tábla a billenés következtében $48 - 21,8 = 26,2$ fokkal fordult el.

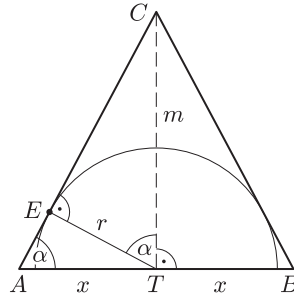
9. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja körül olyan félkört rajzoltunk, mely érinti a háromszög oldalait. Mekkora a háromszög szögei, ha a félkör területe a háromszög területének a lehető legnagyobb százalékát teszi ki? (16 pont)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Ha a háromszög alapon fekvő szöge α , akkor $\angle ETC = \alpha$, hiszen $\angle EAT <$ és $\angle ETC <$ merőleges szárú hegyesszögek.

Az EAT derékszögű háromszögben $\sin \alpha = \frac{r}{x}$, ahonnan $x = \frac{r}{\sin \alpha}$. Az ETC derékszögű háromszögben $\cos \alpha = \frac{r}{m}$, ahonnan $m = \frac{r}{\cos \alpha}$.

A háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{2xm}{2} = xm = \frac{r^2}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$



A félkör területe: $T_{\text{félkör}} = \frac{r^2 \pi}{2}$. A félkör és a háromszög területének hányadosa az α hegyesszög függvényében:

$$H(\alpha) = \frac{\frac{r^2 \pi}{2}}{\frac{r^2}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{\pi}{2} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Ennek akkor lehet szélsőértéke, ha a deriváltja 0.

$$H'(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot [(\sin \alpha)' \cos \alpha + (\cos \alpha)' \sin \alpha] = \frac{\pi}{2} \cdot [\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha] = 0.$$

Mivel α hegyesszög, azért $\sin \alpha = \cos \alpha$, ahonnan $\alpha = 45^\circ$. A kapott érték valóban szélsőérték és maximum, hiszen $\alpha < 45^\circ$ esetén $H'(\alpha) > 0$, $\alpha > 45^\circ$ esetén pedig $H'(\alpha) < 0$.

Vagyis a keresett háromszög szögei: 45° , 45° , 90° .

Megjegyzés. Természetesen, az addíciós tételek ismeretében a következő átalakítással, deriválás nélkül is ugyanehhez az eredményhez juthattunk volna:

$$H(\alpha) = \frac{\pi}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\pi}{4} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha.$$

Gerőcs László
Budapest