Megoldásvázlatok a 2011/7. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Adjuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:*
a) $(x+500)^2 = 252\,012 - 1011x$;
b) $\lg^2 x + 2011 \cdot \lg x - 2012 = 0$;
c) $x + 2011\sqrt{x-7} - 2019 = 0$. (*11 pont*)

Megoldás. *a)* Végezzük el a négyzetre emelést és rendezzük nullára az egyenletet:

$$x^2 + 2011x - 2012 = 0.$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alkalmazásával vagy megoldóképlettel ($x_1 + x_2 = -2011$, $x_1x_2 = -2012$) gyorsan megkapható, hogy $x_1 = 1$, $x_2 = -2012$.

b) Az egyenlet $\lg x$-re másodfokú, az értelmezési tartománya: $x > 0$. A két lehetséges érték $\lg x$-re *a)* megoldása alapján: $(\lg x)_1 = 1$, $(\lg x)_2 = -2012$. Vagyis: $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-2012}$. Mindkettő megoldása az egyenletnek, mert benne van az értelmezési tartományban.

c) Az értelmezési tartomány: $x \ge 7$. A következő alakban is írhatjuk a megadott egyenletet:

$$x - 7 + 2011\sqrt{x-7} - 2012 = 0.$$

Másodfokú egyenletet kaptunk $\sqrt{x-7}$-re. A két lehetséges érték $\sqrt{x-7}$-re: $\left(\sqrt{x-7}\right)_1 = 1$, $\left(\sqrt{x-7}\right)_2 = -2012$. Az első esetben $x = 8$, a második esetben nincs megfelelő x. Az $x = 8$ megoldása az egyenletnek, mert benne van az értelmezési tartományban.

2. *Egy mértani sorozat első eleme 2. Ha a sorozat második elemét 20-szal csökkentjük, a harmadik elemét pedig az első kettő elé írjuk, akkor egy számtani sorozat három, egymást követő tagját kapjuk. Adjuk meg az eredeti három számot.* (*12 pont*)

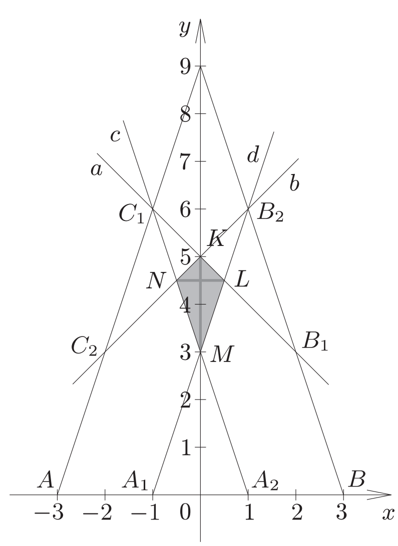
Megoldás. Legyen a mértani sorozat hányadosa q, ekkor a feladatban szereplő három tag: 2; $2q$; $2q^2$. A szöveg alapján a $2q^2$; 2; $2q-20$ egy számtani sorozat három, egymást követő tagja lesz, azaz: $2-2q^2 = 2q-20-2$. Rendezéssel a $0 = q^2 + q - 12$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelyből: $q_1 = 3$, $q_2 = -4$.

Két megfelelő számhármast találtunk. Megoldás a 2; 6; 18, illetve a 2; -8; 32.

3. *Az ABC egyenlőszárú háromszögben $AB = 6$, $CF = 9$, ahol F az AB alap felezőpontja. Az A csúcstól indulva és a körüljárási irányt tartva az oldalakon a harmadoló pontok: A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Mekkora a C_1B_1, C_2B_2, C_1A_2, A_1B_2 egyenesek által meghatározott négyszög területe?* (*14 pont*)

Megoldás. Az ABC háromszöget tegyük koordinátarendszerbe a következő módon: $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $C(0;9)$. A feladatban szereplő harmadoló pontok koordinátáit is meg tudjuk adni: $A_1(-1;0)$, $A_2(1;0)$, $B_1(2;3)$, $B_2(1;6)$, $C_1(-1;6)$, $C_2(-2;3)$.

A harmadoló pontok ismeretében a megfelelő egyenesek egyenlete felírható, hiszen minden kérdéses egyenes két pontjával adott.



A C_1 és a B_1 pontokra illeszkedő a egyenes egyenlete: $y=-x+5$.

A C_2 és a B_2 pontokra illeszkedő b egyenes egyenlete: $y=x+5$.

Az A_2 és a C_1 pontokra illeszkedő c egyenes egyenlete: $y=-3x+3$.

Az A_1 és a B_2 pontokra illeszkedő d egyenes egyenlete: $y=3x+3$.

Meghatározzuk a megfelelő metszéspontok koordinátáit.

Az a és b metszéspontja: $K(0;5)$.

A c és d metszéspontja: $M(0;3)$.

Az a és d metszéspontja: $L\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$.

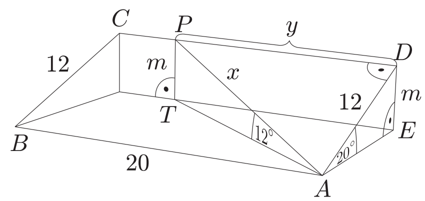
Az ábra szimmetriája miatt

a c és b metszéspontja: $N\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$. A szimmetria miatt $KLMN$ négyszögről belátható, hogy deltoid.

Csúcsainak ismeretében az átlók hossza: $KM=2$, $NL=1$. Vagyis a kérdéses terület: $t_{KLMN}=\frac{1\cdot 2}{2}=1$.

4. *Az $ABCD$ téglalap alakú $20°$-os emelkedő alsó, vízszintes, 20 méter hosszúságú AB oldalának az A csúcsából egy egyenes mentén szeretnénk feljutni a CD oldal valamely pontjába. Ezeknek a párhuzamos oldalaknak 12 méter a távolsága. Hová érkezhetünk, ha az útvonal vízszintessel bezárt hajlásszöge nem haladhatja meg a $12°$-ot?* (*14 pont*)

Megoldás. A szöveg alapján készítsünk ábrát.



Az AED derékszögű háromszögben $\sin 20° = \frac{m}{12}$, azaz $m=12\cdot\sin 20° \approx 4{,}10$.

Az ATP derékszögű

háromszögben $\sin 12° = \frac{m}{x} = \frac{4{,}1}{x}$, azaz $x=\frac{4{,}1}{\sin 12°}\approx 19{,}72$.

Végül az ADP derékszögű háromszögben

$$y=\sqrt{x^2-12^2}=\sqrt{19{,}72^2-12^2}\approx 15{,}65.$$

Vagyis ha $DP\geq 15{,}65$ m, akkor AP vízszintessel bezárt hajlásszöge nem nagyobb, mint $12°$.

II. rész

5. *Tekintsük a $K(5;2)$ középpontú, $r=3$ egység sugarú k kört. Az origóból az e_1 és az e_2 érintők húzhatók a k körhöz.*

a) Írjuk fel e_1 és e_2 egyenletét.

b) Mekkora szöget zár be egymással e_1 és e_2?

c) Mekkora területű az a síkidom, amelynek pontjaiból a k kör $60°$-nál nem kisebb, $90°$-nál pedig nem nagyobb szögben látható? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A k kör egyenlete: $(x-5)^2+(y-2)^2=9$. Az origóra illeszkedő egyenesek egyenlete: $y=mx$. Ezek közül az lesz az érintő, amelynek a körrel pontosan egy közös pontja van. Tehát az

$$\left.\begin{aligned}(x-5)^2+(y-2)^2&=9,\\ y&=mx\end{aligned}\right\}$$

paraméteres egyenletrendszerben azokat az m paramétereket keressük, amelyekre az egyenletrendszernek csak egyféle megoldása van.

Végezzük el a behelyettesítést:

$$(x-5)^2+(mx-2)^2=9,$$

$$x^2-10x+25+m^2x^2-4mx+4=9,$$

$$\left(m^2+1\right)x^2-(4m+10)x+20=0.$$

A keresett m értékeket akkor kapjuk, ha a fenti paraméteres másodfokú egyenletben:

$$D = (4m+10)^2 - 80(m^2+1) = 0,$$

$$16m^2 + 80m + 100 - 80m^2 - 80 = 0,$$

$$16m^2 - 20m - 5 = 0.$$

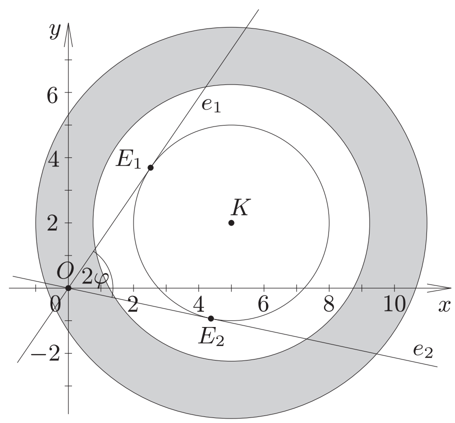
$$m_{1;2} = \frac{20 \pm \sqrt{400+320}}{32} = \frac{20 \pm \sqrt{720}}{32} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{8}.$$

A keresett két érintő egyenlete: $e_1: y = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{8}x$, $e_2: y = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{8}x$.

b) Legyen az e_1 érintőn E_1, az e_2 érintőn E_2 az érintési pont. A két érintő hajlásszöge az $E_1OE_2\sphericalangle$, ami az OKE_1 derékszögű háromszög O-nál lévő φ hegyesszögnek a kétszerese. Az origó és a K középpont távolságát ki tudjuk számolni: $OK = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$. Tudjuk, hogy $E_1K = 3$, ezért $\sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$.

Ebből kapjuk: $\varphi \approx 33{,}85°$, a hajlásszög pedig: $2\varphi \approx 67{,}7°$.

Megjegyzés. A hajlásszöget természetesen a két meredekség ismeretében is meg tudnánk határozni, most azonban egy olyan gondolatmenetet láttunk, amely nem épült az előző kérdésre adott válaszra.



c) Ha egy P pontból a kör 60°-os szögben látható, jelölje R_1 a P-ből húzott egyik érintő érintési pontját. Ekkor a KPR_1 derékszögű háromszögben $KR_1 = 3$, $KP = 6$. Vagyis az ilyen P pontok halmaza egy K középpontú, 6 sugarú körvonal lesz.

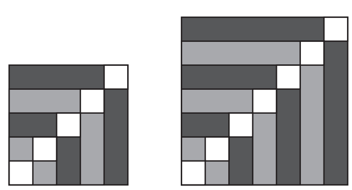
Ha egy Q pontból a kör 90°-os szögben látható, jelölje T_1 a Q-ból húzott egyik érintő érintési pontját. Ekkor a KQT_1 derékszögű háromszögben $KT_1 = 3$, $KQ = 3\sqrt{2}$. Vagyis az ilyen Q pontok halmaza egy K középpontú, $3\sqrt{2}$ sugarú körvonal lesz.

A megfelelő pontok e két körvonal által meghatározott körgyűrű pontjai lesz- nek.

Ezek szerint a terület: $(36-18)\cdot\pi = 18\pi$.

6. *Miskolcon a Tiszai pályaudvar várótermének kövezéséhez az* ábrán *látható burkolólapokat is használtak. Ezeken a lapokon egy ötször ötös négyzethálót színeztek három színnel (sötétzöld, világoszöld, fehér).*

Ezt a mintát jobbra és felfelé tovább folytathatjuk, és bármely ötnél nagyobb páratlan számhoz elkészíthetjük az ábra színezését. Lerajzoltuk az így készített hétszer hetes négyzethálót is.



a) *Hányadrésze lesz világoszöld az* 51 *egység oldalú négyzetnek?*

b) *Hányadrésze lesz sötétzöld a* 101 *egység oldalú négyzetnek?*

c) *Igazoljuk, hogyha a négyzet oldalhosszát minden határon túl növeljük, akkor mind a világoszöld, mind a sötétzöld részek területe a négyzet területének a feléhez tart.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az 51 egység oldalú négyzet 51^2, azaz 2601 területű. A világoszöld téglalapok területe sorban: $1, 3, 5, 7, \ldots, 49$. Mindegyikből kettő van, ezért területük összege: $2(1+3+5+\ldots+49) = 2\cdot 25^2 = 1250$. (Felhasználtuk, hogy az első 25 pozitív páratlan szám összege 25^2.)

Vagyis az $\dfrac{1250}{2601} \approx 0{,}480\,58$ része lesz világoszöld az 51 egység oldalú négyzetnek.

b) A 101 egység oldalú négyzet 101^2, azaz 10 201 területű. A sötétzöld téglalapok területe sorban: $2, 4, 6, 8, \ldots, 100$. Mindegyikből kettő van, ezért területük összege:

$$2(2+4+6+\ldots+100) = 4(1+2+3+\ldots+50) = 4 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 5100.$$

Vagyis az $\dfrac{5100}{10201} \approx 0{,}499\,95$ része lesz sötétzöld a 101 egység oldalú négyzetnek.

c) A $2n+1$ egység oldalú négyzet $(2n+1)^2$ területű, ahol n tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész számot jelöl. A világoszöld téglalapok területe sorban: $1, 3, \ldots, (2n-1)$. Mindegyikből kettő van, ezért területük összege:

$$2 \cdot \big[1+3+5+\ldots+(2n-1)\big] = 2 \cdot n^2.$$

A következő értéket kell meghatároznunk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(2n+1)^2}.$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket és alkalmazzuk a határértékre megismert tulajdonságokat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(2n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{4n^2+4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0{,}5.$$

A sötétzöld téglalapok területe sorban: $2, 4, 6, \ldots, 2n$. Mindegyikből kettő van, ezért területük összege:

$$2(2+4+\ldots+2n) = 4(1+2+\ldots+n) = 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 2n(n+1).$$

Most a következő értéket kell meghatároznunk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket és alkalmazzuk a határértékre megismert tulajdonságokat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n}{4n^2+4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{2}{n}}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0{,}5.$$

Ezzel mindkét esetben igazoltuk az állítást.

7. *A* $[0;4]$*-on értelmezett* $f(x) = \dfrac{x^2}{16}+1$ *hozzárendeléssel adott függvény képét megforgatjuk az* x *tengely körül. Az így kapott felület egy olyan forgástest alakú edény palástját adja, melynek az alja a kisebb kör. A koordinátarendszer egysége a valóságban* 1 dm*-t jelent.*

a) *Hány literes az edény, ha falvastagságát elhanyagolhatónak vehetjük?*

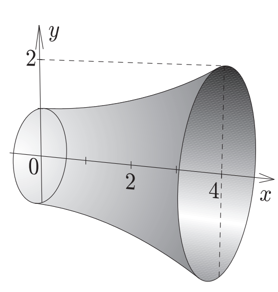
b) *Az edény aljának középpontjában áll egy elhanyagolható vastagságú egyenes pálca. Ezt a pálcát úgy döntjük el, hogy az alsó vége nem mozdul el. Milyen magasságban érinti a pálca az edény falát?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A $[0;4]$-on értelmezett $f(x) = \dfrac{x^2}{16}+1$ hozzárendeléssel adott függvény forgatásával kapott forgástest térfogata (*1. ábra*):

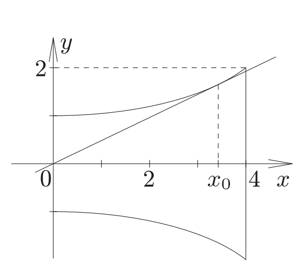
$$V = \pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{16}+1\right)^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{x^4}{256}+\frac{x^2}{8}+1\right) dx = \pi \left[\frac{x^5}{1280}+\frac{x^3}{24}+x\right]_0^4 =$$

$$= \pi \left(\frac{4^5}{1280}+\frac{4^3}{24}+4-\frac{0^5}{1280}-\frac{0^3}{24}-0\right) = \frac{52\pi}{15} \approx 23{,}5.$$

Az edény kb. 23,5 literes.



1. ábra



2. ábra

b) A rajz a forgástengelyre illeszkedő keresztmetszetet mutatja az eldöntött pálcával (*2. ábra*). A kérdéses magasság legyen x_0.

Írjuk fel az origóból az f függvényhez húzható érintő egyenletét. Az origóra illeszkedő egyenesek egyenlete: $y=mx$ (most $m>0$), az f függvény görbéjének

egyenlete: $y=\dfrac{x^2}{16}+1$.

A behelyettesítés után kapjuk: $mx=\dfrac{x^2}{16}+1$,

$$0=x^2-16mx+16, \qquad D=256m^2-64=0.$$

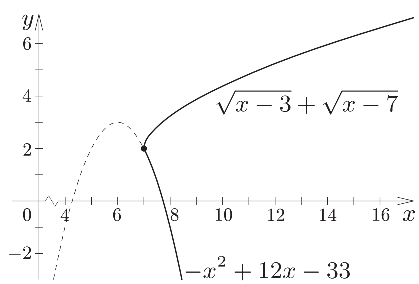
Minden feltételnek az $m=\dfrac{1}{2}$ felel meg, vagyis a keresett érintő egyenlete: $y=\dfrac{x}{2}$. Ez az érintő a $(4;2)$ koordinátájú pontban érinti az f függvény képét.

Vagyis $x_0=4$. (Ez az edény felső peremének magassága.)

8. *Oldjuk meg a* $-x^2+12x-33=\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}$ *egyenletet.* (*16 pont*)

Megoldás. A feladat értelmezési tartománya: $x\ge 7$. Alakítsuk át a bal oldalon látható másodfokú kifejezést:

$$-x^2+12x-33=-\left(x^2-12x+33\right)=-\left[(x-6)^2-3\right]=-(x-6)^2+3.$$



Ebben az alakban már könnyen megállapítható, hogy az $x=6$ maximum helye ennek a kifejezésnek, és a $[6;\infty]$-on szigorúan monoton csökkenő, vagyis a feladat értelmezési tartományán is az.

Mivel a $\sqrt{x-3}$ és a $\sqrt{x-7}$ szigorúan monoton növekedő, azért az összegük is az. Az értelmezési tartomány legkisebb elemére, az $x=7$-re a bal oldal helyettesítési értéke:

$$-x^2+12x-33=-7^2+12\cdot 7-33=2,$$

a jobb oldal helyettesítési értéke:

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}=\sqrt{7-3}+\sqrt{7-7}=2.$$

Az egyenlőség miatt az $x=7$ megoldása az egyenletnek. Több megoldás a fent elmondottak miatt nincs.

9. *Egy háromszögben ismerjük mindhárom oldal hosszát és mindhárom szög nagyságát. Mutassuk meg, hogy ezeket az értékeket az*

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}$$

képletbe behelyettesítve a háromszög területét kapjuk. (*16 pont*)

Megoldás. A megadott képletet alakítsuk a következő módon:

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\cdot\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)}.$$

A koszinusz-tételt alkalmazva: $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Ugyanígy felírhatjuk $\cos\beta$ és $\cos\gamma$ értékét is:

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \qquad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Vagyis:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4\cdot\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\cdot\left(\dfrac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\sin\alpha}+\dfrac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\sin\beta}+\dfrac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\sin\gamma}\right)}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\cdot\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin\alpha}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac\sin\beta}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\sin\gamma}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\cdot}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{4t}+\frac{a^2+c^2-b^2}{4t}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4t}\right)}=$$

$$=\frac{t\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(b^2+c^2-a^2\right)+\left(a^2+c^2-b^2\right)+\left(a^2+b^2-c^2\right)}=\frac{t\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a^2+b^2+c^2}=t.$$

Valóban a háromszög területét adja ez a képlet.