

Emelt szintű gyakorló feladatsor

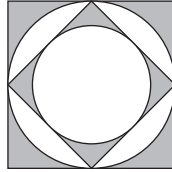
I. rész

1. Melyik az a három természetes szám, melyek egy számtani sorozat egymást követő elemei, négyzetösszegük 264, valamint a szorzatuk egyenlő 1792 és a középső szám hányadosával? (10 pont)

2. Mekkora annak az érintőtrapéznek a területe, amelynek egyik szára a 7 cm hosszú párhuzamos oldallal 120 fokos szöget zár be, valamint beírt körének sugara 5 cm? (13 pont)

3. Az ábrán egy egység oldalú négyzet, annak beírt köre, oldalfelező pontjai által meghatározott négyzet és annak is a beírt köre látható.

- a) Hány százalékat színeztük ekkor szürkére a nagy négyzetnek?
b) Ismételjük meg ezt az eljárást végtelen sokszor. Hány százalékat színeztük így szürkére a nagy négyzetnek? (14 pont)



4. Adjuk meg azt a két egymást követő egész számot, amelyek közé esik a következő összeg: 2pt plus2pt

$$\lg \left(11 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \right) + \lg \left(11^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \right) + \lg \left(11^3 \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} \right) + \dots + \lg \left(11^{500} \cdot \sqrt{\frac{999}{1001}} \right).$$

(14 pont)

II. rész

5. A 2 cm sugarú gömb alakú bonbonokat ötösével négyzet alapú, gúla alakú dobozokba csomagolják úgy, hogy négy kerül alulra, egy a tetejére. Minden alsó gömb érinti a felsőt és két szomszédos alsót, továbbá érinti a gúla alaplajját és két szomszédos oldallapját. A felső gömb mind a négy oldallapot érinti.

- a) Milyen magas a doboz?
b) Mekkora a doboz felszíne? (16 pont)

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+13}$;

b) $\frac{\log_2(x^3 + 26)}{\log_4(x+2)} = 6$;

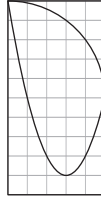
c) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$.

(16 pont)

7. Adott a koordináta-rendszerben a $k_1: x^2 + y^2 = 9$ és a $k_2: (x-17)^2 + (y-7)^2 = 100$ kör. Igazoljuk, hogy a két kör vízszintes közös külső és a pozitív meredekségű közös belső érintőjének metszéspontjából derékszögben látszik a két kör középpontja által meghatározott szakasz. (16 pont)

8. A szabó egy farsangi pillangójelmezhez az ábrán látható mintát használja, amit a boltban vásárolt téglalap alakú anyagból vág ki. A szabásminta egy parabolaívából és egy körívából áll.

- a) Az anyag hány százaléka lesz hulladék?
b) Adjuk meg a parabola és a kör összes metszéspontját. (16 pont)



9. A 2012-es londoni olimpián csapatunk 8 arany-, 4 ezüst- és 5 bronzérmét szerzett. Nem volt olyan versenyszám, amiben két magyar érem született. *a)* Hányféleképpen sorolhatjuk föl azokat a versenyszámokat, amelyekben csapatunk érmét szerzett, úgy, hogy először az aranyérmesek, utána az ezüstérmesek, végül a bronzérmesek versenyszámait nevezzük meg? *b)* Hányféleképpen sorolhatjuk fel a fenti 17 versenyszámot, ha az azonos színű érmét hozó számok közül mindig azt soroljuk fel hamarabb, amelyik korábban ért véget? *c)* Mekkora a valószínűsége annak, hogy az érmes versenyszámaink közül véletlenszerűen hármat választva az azokhoz tartozó érmek különböző színűek lesznek? *(16 pont)*

Gedeon Veronika
(Budapest)