

## Az 53. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldásai

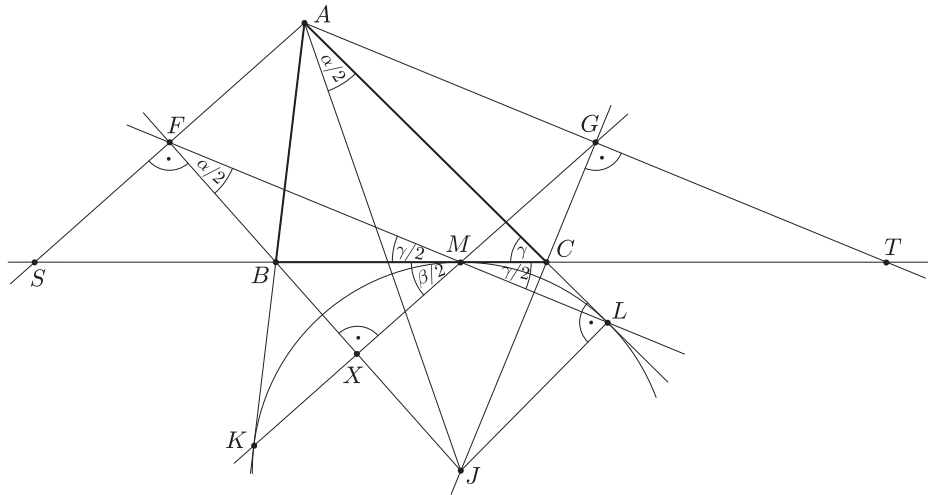
A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

### A szerkesztőség

1. Az  $ABC$  háromszög  $A$  csúccsal szemközti hozzáírt körének középpontja  $J$ . Ez a hozzáírt kör a  $BC$  oldalt az  $M$  pontban, az  $AB$ , ill.  $AC$  egyeneseket pedig a  $K$ , ill.  $L$  pontban érinti. Az  $LM$  és  $BJ$  egyenesek metszéspontja  $F$ , a  $KM$  és  $CJ$  egyenesek metszéspontja pedig  $G$ . Legyen  $S$  az  $AF$  és  $BC$  egyenesek metszéspontja,  $T$  pedig a  $AG$  és  $BC$  egyenesek metszéspontja.

Bizonyítsuk be, hogy  $M$  az  $ST$  szakasz felezőpontja.

(Az  $ABC$  háromszög  $A$  csúccsal szemközti hozzáírt köre az a kör, amelyik érinti a  $BC$  szakaszt, továbbá az  $AB$  félegyenes  $B$ -n túli részét és az  $AC$  félegyenes  $C$ -n túli részét.)



$\angle FMB = \angle LMC = \frac{\gamma}{2}$ , mert az  $CLM$  háromszög egyenlő szárú és a  $C$ -nél levő szöge az  $ABC$  háromszög  $\gamma$ -hoz tartozó külső szöge. Hasonlóan  $\angle BMK = \frac{\beta}{2}$ . Jelölje az  $MK$  és  $JF$  szakaszok metszéspontját  $X$ ; ekkor  $\angle MXF = 90^\circ$ , mert a  $BMK$  háromszög egyenlő szárú, és  $BJ$  felezi a  $B$ -nél lévő szöget, ezért merőleges az  $MK$  alapra. Így

$$\begin{aligned} \angle LFJ = \angle MFX &= 180^\circ - \angle FMX - \angle MXF = \\ &= 180^\circ - \angle FMB - \angle BMX - \angle MXF = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} - 90^\circ = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$\angle LAJ = \frac{\alpha}{2}$ , mert az  $A$ -hoz tartozó belső szögfelező átmegy a hozzáírt kör középpontján. Ebből és az  $\angle LFJ$ -re kapott eredményből következik, hogy  $ALJF$  húrnégyszög.

$\angle ALJ = 90^\circ$ , hiszen  $AL$  érintő, tehát a vele szemközti  $\angle JFA$  is  $90^\circ$ .  $GX$  párhuzamos  $AS$ -sel, mivel  $\angle GXF = 90^\circ$ . Az előbbiekhöz hasonlóan  $\angle JGA = 90^\circ$ .

Így  $G$  felezi az  $AT$  szakaszt, mivel a  $JG$ -re való tükrözésnél az  $AL$  egyenes képe az  $MT$  egyenes, az  $AT$  egyenes helyben marad, tehát  $A$  képe  $T$ . Emiatt az  $ATS$  háromszögben a  $GM$  középvonal, tehát  $M$  felezi  $ST$ -t. (A megoldás független az ábrától.)

2. Legyen  $n \geq 3$  egész, és legyenek  $a_2, a_3, \dots, a_n$  olyan pozitív valós számok, amelyekre  $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

**Ágoston Tamás megoldása.** Ha  $i \geq 2$  egész, akkor az  $\frac{1}{i-1}, \frac{1}{i-1}, \dots, \frac{1}{i-1}, a_i$  pozitív számokra (az  $\frac{1}{i-1}$  szám  $(i-1)$ -szer szerepel) alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{(i-1)\frac{1}{i-1} + a_i}{i} \geq \sqrt[i]{\frac{a_i}{(i-1)^{i-1}}}.$$

Ezt  $i$ -edik hatványra emelve, és szorozva a bal oldali nevezővel:

$$(1) \quad (1 + a_i)^i \geq \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}} a_i.$$

Ha  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , akkor itt mindkét oldal pozitív, így ezekre az  $i$ -kre összeszorozva (1)-et:

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdot \dots \cdot (1 + a_n)^n \geq \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} a_2 a_3 \cdot \dots \cdot a_n = n^n.$$

Itt használjuk azt a feltételt, hogy  $a_2 a_3 \cdot \dots \cdot a_n = 1$ . Azt kell még belátnunk, hogy egyenlőség nem állhat fenn.

Mivel (1)-ben a kérdéses  $i$ -kre mindkét oldal pozitív, a szorzatban egyenlőség pontosan akkor áll, ha minden  $i$ -re (1)-ben egyenlőség áll. Ez pedig pontosan akkor igaz, ha minden  $i$ -re a számtani és mértani közepeket egyenlő számokra vettük, azaz  $a_i = \frac{1}{i-1} = \dots = \frac{1}{i-1}$ . Ekkor viszont  $a_2 a_3 \cdot \dots \cdot a_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n-1}$ , ahol minden tényező pozitív, és 1-nél nem nagyobb. Viszont  $n \geq 3$  miatt az 1-nél kisebb  $\frac{1}{2}$  tényező is szerepel, vagyis a szorzat kisebb 1-nél. Ez ellentmond a feladat feltételének, így valóban nem állhat fenn egyenlőség, azaz

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdot \dots \cdot (1 + a_n)^n > n^n,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

**3. A hazudós játékot két játékos játssza:  $A$  és  $B$ . A játék szabályaiban szerepel két pozitív egész szám:  $k$  és  $n$ , ezek értékét mindkét játékos ismeri.**

A játék megkezdésekor  $A$  választ két egész számot:  $x$ -et és  $N$ -et, amikre  $1 \leq x \leq N$ .  $A$  az  $x$  számot titokban tartja, viszont  $N$ -et őszintén megmondja  $B$ -nek.  $B$  ezután megpróbál  $x$ -re vonatkozó információt szerezni  $A$ -tól a következő típusú kérdésekkel:  $B$  minden kérdésében megadja pozitív egész számok egy tetszőleges  $S$  halmazát (olyan  $S$  halmazt is megadhat, amit már korábban is megadott), és azt kérdezi  $A$ -tól, hogy  $x$  eleme-e ennek az  $S$  halmaznak.  $B$  akárhány ilyen típusú kérdést feltehet.  $A$ -nak  $B$  minden kérdésére a kérdés elhangzása után azonnal igennel vagy nemmel kell válaszolnia, de mindegyik válasza lehet hazugság is; az egyetlen kikötés az, hogy bármely egymás utáni  $k+1$  válasz közül legalább egynek őszintének kell lennie.

Miután  $B$  annyiszor kérdezett, ahányszor csak akart, meg kell neveznie egy legfeljebb  $n$  pozitív egész számból álló  $X$  halmazt. Ha  $x$  eleme az  $X$  halmaznak, akkor  $B$  nyer; különben  $B$  veszít. Bizonyítsuk be:

1. Ha  $n \geq 2^k$ , akkor  $B$ -nek van nyerő stratégiája.

2. Minden elég nagy  $k$ -hoz van olyan  $n \geq 1,99^k$  egész szám, amire  $B$ -nek nincs nyerő stratégiája.

**Janzer Olivér megoldása.** 1. rész. Nyilván nem változik a feladat, ha az  $\{1, 2, \dots, N\}$  halmaz helyett tetszőleges  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$  halmazból kerül ki  $x$  ( $a_i \neq a_j$ ). Ha  $n \geq 2^k$ , megmutatjuk a nyerő stratégiát.

Ha  $N \leq 2^k$ , akkor az  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$  halmazra  $|X| = N \leq 2^k \leq n$ , így  $|X| \leq n$ , tehát  $X$  megfelelő,  $B$  nyert.

Tegyük fel, hogy  $N > 2^k$ .

$N$  szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be, hogy van nyerő stratégia. Tegyük fel, hogy  $N = \ell$ -re készen vagyunk (ahol  $\ell \geq 2^k$ ). Bizonyítunk  $N = (\ell + 1)$ -re. Kérdezzük meg az  $S = \{a_1\}$  halmazt addig, amíg az első „igen” választ nem kapjuk. Ha végig „nem”-et kapunk, még  $k+1$  kérdés után is, akkor  $x \neq a_1$  (hiszen ekkor a „nem” igaz), így  $x$  az  $\ell$  elemszámú  $\{a_2, a_3, \dots, a_{\ell+1}\}$  halmazban van, így az indukciós feltétel szerint innen van nyerő stratégiánk. Tegyük fel egyébként, hogy a válasz egyszer „igen”. Rögtön ezután tegyük a következőt: vegyük az  $a_2, a_3, \dots, a_{2^k+1}$  számokat ( $2^k + 1 \leq \ell + 1$ ). Rendeljük  $a_j$ -hez a  $(j-2)$  sorszámot. Ekkor kiosztottunk sorszámokat 0-tól  $(2^k - 1)$ -ig. Kódoljuk a sorszámokat 2-es számrendszerben. Ezután tegyük fel  $k$  darab kérdést, amelyek a következők:

1.  $x$  benne van abban a halmazban, amely halmaz a kiválasztott számok közül azokat tartalmazza, amelyek sorszámának 2-es számrendszerbeli alakjában az első jegy 0?

És így tovább, az  $i$ -edik kérdés a sorszám  $i$ -edik jegyére kérdez rá (2-es számrendszerben). Így, mivel  $2^k$  sorszámot osztottunk ki 0-tól  $(2^k - 1)$ -ig és ezeket 2-es számrendszerben  $k$  jegy kódolja:

$$0 : \underbrace{00 \dots 0}_k; \quad 1 : \underbrace{00 \dots 01}_{k-1}; \quad \dots; \quad 2^k - 1 : \underbrace{11 \dots 11}_k,$$

ezért  $k$  kérdéssel  $x$  sorszámát 2-es számrendszerbeli alakjának minden jegyére választ kapunk. Vegyük az utolsó  $(k+1)$  darab feltett kérdésünket. Ezek között a feladat feltétele miatt lennie kell olyannak, amelyre  $A$  őszintén válaszolt. Ekkor azonban kizárhatjuk az olyan  $x$ -eket, amelyekre az igaz válaszok mindig az  $A$  által adott válaszok ellentétei. Belátjuk, hogy van ilyen szám. Az  $A$  által adott első válasz „igen”, ennek ellentéte „nem”, továbbá a következő  $k$  válasz tagadása meghatároz egy sorszámot, legyen ez  $a_t$  sorszám ( $2 \leq t \leq 2^k + 1$ ). Ekkor, mivel  $a_1 \neq a_t$ , azért  $x$  nem lehet  $a_t$ , ugyanis

akkor az első kérdésre „nem” az őszinte válasz, a további kérdésekre pedig  $a_t$  definíciója szerint mindig az ellenkező, mint amit  $A$  adott. Ez azonban ellentmond a feladat  $(k+1)$  egymást követő kérdésre vonatkozó feltételének. Így  $x \neq a_t$ . Ekkor  $x$  benne van egy  $\ell$  elemű halmazban (az eredetiből elhagyjuk  $a_t$ -t), innen pedig az indukciós feltevés szerint van nyerő stratégiánk. Így a feladat első részének állítását igazoltuk.

2. rész. Megmutatjuk, hogy ha  $1,99 < \lambda < 2$  és  $n = [(2-\lambda)\lambda^{k+1}] - 1$ , valamint  $N = n+1$ , akkor  $B$ -nek nincs nyerő stratégiája.

Jelöljük  $V$ -vel a  $B$ -nek azon kérdésére adott választ, hogy  $x$  benne van-e az  $S$  halmazban. Ekkor legyen  $V$  *inkonzisztens  $i$ -vel*, ha a válasz „igen” és  $i$  nem eleme  $S$ -nek; vagy ha a válasz „nem” és  $i$  eleme  $S$ -nek. Legyen egy adott pillanatban  $m_i$  az a szám, ami megadja, hogy  $A$  addig (a legutolsót is beleértve) hány egymást követő,  $i$ -vel inkonzisztens választ adott. Például, ha a válaszok minősítése az  $i$  szempontjából sorban ink.; nem ink.; ink.; ink., akkor éppen  $m_i = 2$ .

Legyen

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i}.$$

Legyen  $A$  válasza mindig olyan, hogy a válasza után a két lehetséges  $\Phi$  érték közül a kisebbet kapjuk. Ehhez persze be kell látnunk, hogy ilyenkor  $A$  lépései szabályosak. Elég azt megmutatnunk, hogy  $\Phi < \lambda^{k+1}$ , hiszen akkor mindegyik  $m_i$  kisebb  $(k+1)$ -nél; viszont (legalább)  $k+1$  egymást követő hazugság  $k+1$  egymást követő inkonzisztens válasz lenne  $x$ -re nézve, amiből  $m_x \geq k+1$  következne (a legalább  $(k+1)$ -edik inkonzisztens válasz után). Mindez azt jelenti, hogy a kívánt egyenlőtlenség mindenkor teljesülése esetén valóban nincs  $k+1$  egymást követő hazugság, azaz  $A$  válaszai szabályosak.

$\Phi < \lambda^{k+1}$  igazolása: Kezdetben  $m_1 = m_2 = \dots = m_{n+1} = 0$ , így  $\Phi_0 = n+1$ . Viszont

$$n+1 = [(2-\lambda)\lambda^{k+1}] \leq (2-\lambda)\lambda^{k+1} < \lambda^{k+1}$$

(hiszen  $\lambda > 1$  miatt  $2-\lambda < 1$ ). Így kezdetben  $\Phi < \lambda^{k+1}$ .

Tegyük fel, hogy valameddig  $\Phi < \lambda^{k+1}$ , majd vizsgáljuk a helyzetet  $A$  aktuális választ követően. Ennek során  $A$ -nak két lehetséges válasza volt: „igen”, ami után  $\Phi_1$  és „nem”, ami után  $\Phi_2$  keletkezik. Mivel ő a kisebbet választotta, azért  $\Phi' \leq \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)$ . Ha ezen kérdés az  $S$  halmazra kérdez rá, és a válasz előtt  $m_1, m_2, \dots, m_{n+1}$  voltak a megfelelő értékek, akkor

$$\Phi_1 = \sum_{i \in S} \lambda^0 + \sum_{j \notin S} \lambda^{m_j+1} \quad \text{és} \quad \Phi_2 = \sum_{i \in S} \lambda^{m_i+1} + \sum_{j \notin S} \lambda^0,$$

így

$$\begin{aligned} \Phi' &\leq \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i \in S} (\lambda^{m_i+1} + 1) + \sum_{j \notin S} (\lambda^{m_j+1} + 1) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{i \in S} \lambda^{m_i+1} + \sum_{j \notin S} \lambda^{m_j+1} \right) + \left( \sum_{i \in S} 1 + \sum_{j \notin S} 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{h=1}^{n+1} \lambda^{m_h+1} + \sum_{h=1}^{n+1} 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2}(\lambda\Phi + n+1). \end{aligned}$$

Mivel  $\Phi < \lambda^{k+1}$  és  $n+1 = [(2-\lambda)\lambda^{k+1}] \leq (2-\lambda)\lambda^{k+1}$ ,

$$\Phi' \leq \frac{1}{2}(\lambda\Phi + n+1) < \frac{1}{2}(\lambda^{k+2} + (2-\lambda)\lambda^{k+1}) = \lambda^{k+1}.$$

Tehát  $\Phi$  nem lépi át  $\lambda^{k+1}$ -t.

Így  $A$  válaszai szabályosak. Viszont mivel ezek  $x$ -től függetlenek,  $B$  nyilván nem találhatja ki  $x$ -et. Tehát ebben az esetben  $B$ -nek nincs nyerő stratégiája. Belátjuk, hogy elegendően nagy  $k$  esetén  $n$  megfelelő, azaz

$$n \geq 1,99^k \cdot n = [(2-\lambda)\lambda^{k+1}] - 1.$$

Először belátjuk, hogy

$$(2-\lambda)\lambda^{k+1} \geq 1,99^{k+1} \iff \left( \frac{\lambda}{1,99} \right)^{k+1} > 1/(2-\lambda),$$

ami  $\lambda > 1,99$  miatt nyilván igaz. Ekkor azonban (elég nagy  $k$ -ra)

$$n = [(2 - \lambda)\lambda^{k+1}] - 1 \geq (2 - \lambda)\lambda^{k+1} - 2 \geq 1,99^k.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

**4. Határozzuk meg az összes olyan  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  függvényt, amire tetszőleges  $a, b, c$  egészekre, amelyekre  $a + b + c = 0$  teljesül, fennáll az**

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

*egyenlőség. ( $\mathbb{Z}$  az egész számok halmazát jelöli.)*

**1. eset:** A függvénynek nincs más nullhelye. Jelöljük  $f(1)$  értékét  $d$ -vel.

Az  $a = b = 1, c = 2$  választással

$$2f(1)^2 + f(2)^2 = 2f(1)f(1) + 4f(2)f(1).$$

Ebből  $f(2) \neq 0$  miatt  $f(2) = 4f(1) = 4d$ . Ugyanígy  $a = b = 2, c = 4$ -ből  $f(4) = 16d$ . Az  $a = 3, b = 2, c = 1$  választással  $f(3)$ -ra egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$(f(3) - d)(f(3) - 9d) = 0.$$

Ha itt  $f(3) = d$ , akkor  $a = 4, b = 3, c = 1$ -ből ellentmondást kapunk, mert behelyettesítve az értékeket kapjuk, hogy  $256d^2 + d^2 + d^2 = 32d^2 + 2d^2 + 32d^2$ , ami lehetetlen.

Tehát  $f(3) = 9d, f(4) = 16d$ .

Innen teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy  $f(n) = n^2d$ .

Tegyük fel, hogy minden  $0 < k < n$ -re teljesül, hogy  $f(k) = k^2d$ . Ebből  $a = n, b = n - 1, c = 1$  választással

$$f(n)^2 + f(n - 1)^2 + f(1)^2 = 2f(n)(f(n - 1) + f(1)) + 2f(1)f(n - 1),$$

$a = n, b = n - 2, c = 2$ -vel pedig:

$$f(n)^2 + f(n - 2)^2 + f(2)^2 = 2f(n)(f(n - 2) + f(2)) + 2f(2)f(n - 2).$$

A két egyenletet kivonva egymásból és behelyettesítve az ismert értékeket valóban azt kapjuk, hogy  $f(n) = n^2d$ . Ezzel az indukció teljes. Ha tehát nincs más nullhely, akkor  $f(n) = n^2d$ .

**2. eset:** Ha van más (pozitív) nullhely, akkor válasszuk ki a legkisebbet, legyen ez  $a > 0$ , tehát  $f(a) = 0$ .

Minden  $x$ -re teljesül – az  $a = a, b = x, c = a + x$  választás miatt –

$$f(x)^2 + f(a + x)^2 = 2f(x)f(a + x),$$

ezért  $f(x) = f(a + x)$ , tehát a függvény periodikus  $a$  szerint. Így nyilvánvalóan minden nullhely osztható  $a$ -val, pontosabban: a nullhelyek éppen az  $a$  többszörösei.

Ezek után vizsgáljuk  $a$  lehetséges értékeit. Ha  $a \geq 5$ , akkor az első eset bizonyítását megismételhetjük, mivel az csak  $f(1), f(2), f(3), f(4) \neq 0$ -ra alapult. Ezzel azt kapnánk, hogy más nullhely már nem lehet, ami ellentmondás; tehát  $a \leq 4$ .

Ha  $a = 4$ , akkor  $f(1) = d \neq 0, f(2) = 4d$  és

$$f(3) = f(3 - a) = f(-1) = f(1) = d.$$

Ha  $a = 3$ , akkor  $f(1) = d \neq 0, f(2) = 4d$ , de  $f(1) = f(-1) = f(3 - 1) = 4d$ , ami ellentmondás.

Ha  $a = 2$ , akkor  $f(1) = d \neq 0, f(2) = 0$ .

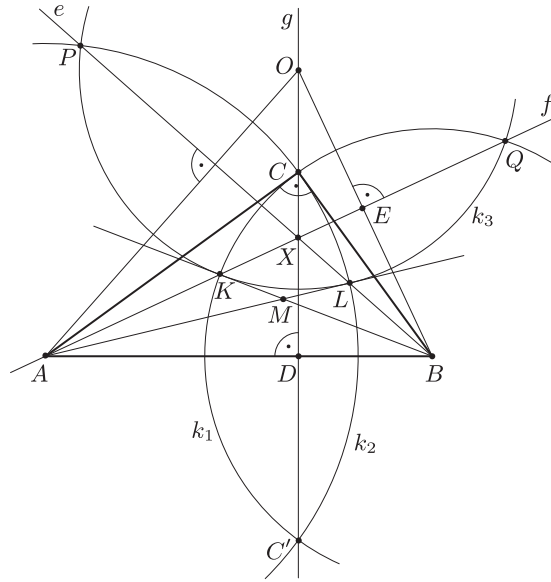
Ha  $a = 1$ , akkor  $f$  a konstans 0 függvény.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a ki nem zárt függvények (minden  $d \neq 0$ -val) valamennyien megoldásai a feladatnak.

**5. Legyen az  $ABC$  háromszögben  $\angle BCA = 90^\circ$ , és legyen  $D$  a  $C$ -ből induló magasságvonal talppontja. Legyen  $X$  a  $CD$  szakasz belső pontja. Legyen  $K$  az  $AX$  szakasznak az  $a$  pontja, amire  $BK = BC$ . Hasonlóan, legyen  $L$  a  $BX$  szakasznak az  $a$  pontja, amire  $AL = AC$ . Legyen  $M$  az  $AL$  és  $BK$  egyenesek metszéspontja.**

**Bizonyítsuk be, hogy  $MK = ML$ .**

**Ódor Gergely megoldása.** Az  $A$  és  $X, B$  és  $X$ , valamint  $C$  és  $D$  pontok által meghatározott egyeneseket nevezzük rendre  $f$ -nek,  $e$ -nek és  $g$ -nek. Húzzuk meg a  $B$  középpontú,  $\overline{BC}$  sugarú  $k_1$  és az  $A$  középpontú,  $\overline{AC}$  sugarú  $k_2$  köröket. A  $g$  egyenes  $k_1$  és  $k_2$  hatványegyenese, mivel merőleges a körök  $\overline{AB}$  centrálisára és átmegy az egyik metszésponton,  $C$ -n.



Tudjuk, hogy a  $k_1$  körnek az  $f$  egyenessel való,  $A$ -hoz közelebbi metszéspontja  $K$ . A másik metszéspontot nevezzük  $Q$ -nak. Hasonlóan a  $k_2$  kör és az  $e$  egyenes  $B$ -hez közelebbi metszéspontja  $L$ , a másikat pedig jelölje  $P$ .

1. állítás:  $XPKE \sim XQL\Delta$ .

Bizonyítás: Mivel  $X$  a hatványegyenes egyik pontja,

$$\overline{XK} \cdot \overline{XQ} = \overline{XL} \cdot \overline{XP}.$$

Átalakítva

$$\frac{\overline{XK}}{\overline{XP}} = \frac{\overline{XL}}{\overline{XQ}}.$$

Az  $XPKE$  és  $XQL$  háromszögek két oldalának aránya és az oldalak által bezárt szög (csúcsszögek miatt) megegyezik. Tehát  $XPKE \sim XQL\Delta$ .

Következmény: A  $KPQL$  négyszög húrnégyszög, mert

$$\angle PLQ = \angle PKQ.$$

A  $KPQL$  körülírt körét jelölje  $k_3$ , középpontját pedig  $O$ .

2. állítás: Az  $AL$  egyenes érinti  $k_3$ -at.

Bizonyítás:  $\overline{AC} \perp \overline{BC}$  és  $\overline{BC}$  a  $k_1$  kör sugara, tehát  $A$ -nak a  $k_1$  körre vonatkozó hatványa  $= \overline{AC}^2$ . Mivel  $A$  rajta van a  $QK$  egyenesen, rajta van  $k_1$  és  $k_3$  hatványegyenesén. Ebből következik, hogy a  $k_3$  körre vonatkozó hatványa is

$$\overline{AC}^2 = \overline{AL}^2.$$

Tehát az  $A$ -ból  $k_3$ -hoz húzott érintő szakaszok hossza  $\overline{AL}$ . A  $k_3$  körön legfeljebb két olyan pont lehet, amely  $A$ -tól  $\overline{AL}$  távolságra van. Mivel  $P$  és  $L$  ilyen és e körhöz  $A$ -ból két érintő húzható, mindkét pont érintési pont. ( $A$  kívül esik a  $k_3$  körön, mivel rajta van a hatványvonalon és kívül van a  $k_1$  körön, hiszen  $\overline{AB} > \overline{BC}$ ).

Hasonlóan látható be a

3. állítás: A  $BK$  egyenes érinti  $k_3$ -at.

Mivel  $\overline{ML}$  és  $\overline{MK}$  a  $k_3$  körhöz húzott érintő szakaszok, egyenlő hosszúak. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

**6. Határozzuk meg az összes olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyhez találhatók olyan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nemnegatív egészek, amelyekre teljesül**

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Azt fogjuk bizonyítani, hogy akkor és csak akkor léteznek megfelelő  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nemnegatív egészek, ha  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ .

A feltétel szükséges voltának igazolásához hozzuk közös nevezőre az

$$1 = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{1}{3^{a_2}} + \dots + \frac{1}{3^{a_n}}$$

összeget: megfelelő  $b_0, b_1, \dots, b_n$  egészekre

$$1 = \frac{3^{b_1} + 2 \cdot 3^{b_2} + \dots + n \cdot 3^{b_n}}{3^{b_0}}.$$

Elég észrevenni, hogy  $i$  és  $i \cdot 3^{b_i}$  paritása azonos, így az  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  összeg páratlan. Ez valóban azt vonja maga után, hogy  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ .

Legyen  $S$  az egész számokból álló végtelen sorozatok halmaza, és legyen azon értelmezett két függvény:

$$f: S \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: (a_1, a_2, \dots) \rightarrow \sum_{a_i \geq 0, i \in N} \frac{1}{2^{a_i}},$$

$$g: S \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: (a_1, a_2, \dots) \rightarrow \sum_{a_i \geq 0, i \in N} \frac{i}{3^{a_i}}.$$

Az  $s = (a_1, a_2, \dots) \in S$  sorozat jó, ha van olyan  $n$  pozitív egész szám, amelyre  $a_i \geq 0 \iff i \leq n$  és  $f(s) = g(s) = 1$ . Azt kell tehát bizonyítani, hogy minden  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  esetén létezik jó sorozat.

Teljes indukciót alkalmazunk. Tegyük fel, hogy egy  $n \geq 12$  egészhez található egy jó  $s = (a_1, a_2, \dots)$  sorozat. Belátjuk, hogy ebből konstruálható egy jó sorozat  $n + 12$ -re a következő kétféle módosítás segítségével:

1. ha az  $s = (a_1, a_2, \dots) \in S$  sorozatban  $a_k \geq 0$ , de  $a_{2k} < 0$ , akkor  $f(s) = f(s')$  és  $g(s) = g(s')$ , ahol  $s' = (b_1, b_2, \dots)$ ,  $a_i = b_i$ , ha  $i \neq k, 2k$ ,  $b_k = b_{2k} = a_k + 1$ .

2. ha az  $s = (a_1, a_2, \dots) \in S$  sorozatban  $a_k \geq 0$ , de  $a_\ell, a_m < 0$ , és  $3k = \ell + m$ , akkor  $f(s) = f(s')$  és  $g(s) = g(s')$ , ahol  $s' = (b_1, b_2, \dots)$ ,  $a_i = b_i$ , ha  $i \neq k, \ell, m$ ,  $b_k < 0$ ,  $b_\ell = b_m = a_k + 1$ .

Feltéve, hogy  $n$ -re létezik jó  $s$  sorozat, vagyis  $f(s) = g(s) = 1$ , a fenti kétféle módosításokkal kapott  $s'$  sorozatra is  $f(s') = g(s') = 1$ . Emiatt már csak azt kell garantálni, hogy  $s'$ -ben az első  $n + 12$ -nél nem nagyobb indexű tagok nemnegatívak, az összes többi pedig negatív legyen.

Mivel feltettük, hogy  $n \geq 12$ , az  $a_{n+1}, \dots, a_{n+12}$  tagok közül a páros indexűeket 1-es típusú lépésekkel nemnegatívba tudjuk vinni. Ezután a 6 db páratlan indexű tag párokba rendezhető úgy, hogy a párosított tagok indexeinek összege osztható 12-vel, hiszen az indexek 12-es maradéka 1, 3, 5, 7, 9, 11 valamilyen sorrendben. Ezeket a párokat a 2-es típusú lépést alkalmazva tudjuk nemnegatívvá tenni. Ha egy ilyen lépés eredményeképpen az  $a_\ell$  és az  $a_m$  tag vált nemnegatívvá, akkor a (páros indexű)  $a_{\frac{\ell+m}{3}}$  tag negatívvá változik, amit egy 1-es típusú átalakítással újra nemnegatívba tudunk vinni.

Végül megadunk egy-egy megfelelő  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  sorozatot  $n$  kis értékei esetén:

|          |                                                                                  |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $n = 1$  | $(0, \dots)$ ,                                                                   |
| $n = 2$  | $(1, 1, \dots)$ ,                                                                |
| $n = 5$  | $(2, 1, 3, 4, 4, \dots)$ ,                                                       |
| $n = 6$  | $(2, 1, 3, 5, 5, 4, \dots)$ ,                                                    |
| $n = 9$  | $(2, 1, 3, 7, 5, 4, 8, 8, 6, \dots)$ ,                                           |
| $n = 10$ | $(2, 1, 3, 7, 6, 4, 8, 8, 6, 6, \dots)$ ,                                        |
| $n = 13$ | $(1, 4, 5, 5, 5, 6, 4, 5, 4, 5, 4, 6, 4, \dots)$ ,                               |
| $n = 14$ | $(1, 4, 5, 5, 5, 6, 5, 5, 4, 5, 4, 6, 4, 5, \dots)$ ,                            |
| $n = 17$ | $(2, 1, 5, 6, 6, 5, 7, 6, 7, 6, 6, 5, 6, 7, 7, 6, 6, \dots)$ ,                   |
| $n = 18$ | $(2, 1, 5, 6, 6, 5, 7, 6, 8, 6, 6, 5, 6, 7, 7, 6, 6, 8, \dots)$ ,                |
| $n = 21$ | $(2, 1, 3, 8, 6, 7, 9, 8, 7, 7, 10, 7, 10, 9, 6, 9, 7, 7, 7, 6, \dots)$ ,        |
| $n = 22$ | $(2, 1, 3, 8, 6, 7, 9, 8, 7, 7, 11, 7, 10, 9, 6, 9, 7, 7, 7, 7, 6, 11, \dots)$ , |

Ezzel a teljes indukció elvének megfelelően az állítás bizonyított.