

Emelt szintű gyakorló feladatsor

Számadó László

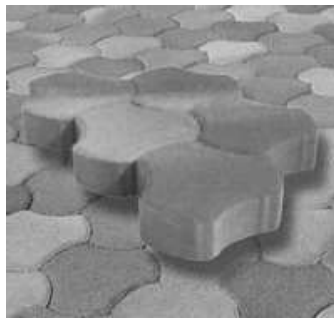
Budapest

I. rész

1. Egy téglalap oldalainak aránya 1 : 2. Tudjuk, hogy a terület mérőszáma egyenlő a kerület és az átlók hosszának összegét jelölő mérőszámmal. Határozzuk meg a téglalap egy csúcsának távolságát a csúcsot nem tartalmazó átlótól. (11 pont)

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

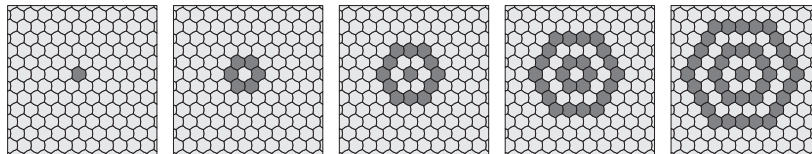
$$\left. \begin{aligned} x^2 - y^2 - 8x + 8y &= 0, \\ xy - 3x - y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12 \text{ pont})$$



3. A térkövezéshez nagyon sokféle alakú és színű kő vásárolható. Az *ábrákon* az úgynevezett fodorkövet, és az ebből kialakítható mintasorozatot látjuk.

- Hány darab sötétszürke kő szükséges a hatodik mintához?
- Hányadik mintához kell pontosan 150 darab sötétszürke kő?
- Adjuk meg rekurzív képlettel a sötétszürke kövek számát az n -edik mintában.

(14 pont)



4. Egy iskolai sakkbajnokságon mindenki pontosan egyszer játszott mindenkivel. 63 játszma után még mindenkinek négy játszmája hátravolt.

- Hányan szerepeltek összesen a bajnokságon?
- Ekkor két véletlenszerűen kiválasztott játékosal beszélgetett az iskolaújság egyik szerkesztője. Mekkora a valószínűsége, hogy ők még nem játszottak egymással?

(14 pont)

II. rész

5. a) Ha 2-vel csökkentjük az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökeit, akkor az $ax^2 + cx + b = 0$ egyenlet gyökeit kapjuk. Adjuk meg az eredeti egyenlet együtthatóit, ha tudjuk, hogy az összegük -3 .

b) Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletben az együtthatók egy növekedő számtani sorozat három egymást követő tagjai, az

$$(a + 2)x^2 + bx + (c + 2) = 0$$

egyenletben az együtthatók pedig egy mértani sorozat három egymást követő tagjai. Van-e valós megoldása az első egyenletnek, ha az együtthatóinak összege 9?

c) Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet két zérushelye x_1 és x_2 . Írjunk fel egy olyan harmadfokú egyenletet gyöktényezőssé alakban, amelynek zérushelyei: x_1x_2 ; $x_1^2 + x_2^2$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. (16 pont)

6. Az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör, az

$$f(x) = \frac{|x + 2| + |x - 2| - 2}{2}$$

hozzárendeléssel megadott függvény képe és az abszcisszatengely egy síkidomot határoznak meg, amit az abszcisszatengely körül megforgatunk. Mekkora az így kapott forgástest térfogata? (16 pont)

7. a) Igazoljuk, hogy $\sqrt{31 + 8\sqrt{15}} + \sqrt{31 - 8\sqrt{15}}$ egész szám.

b) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{(31 + 8\sqrt{15})^x} + \sqrt{(31 - 8\sqrt{15})^x} = \frac{10}{3}. \quad (16 \text{ pont})$$

8. Egy szabadtéri színpad hátsó részén egy 12 m magas oszlop áll, melynek a sугólyuktól a teteje 16° -os emelkedési szögben látszik. Az oszlop talppontját és a sугólyukat összekötő egyenes fölött van egy emelvény, amelyről a 180 cm magas színész 22° -os emelkedési szögben látja az oszlop tetejét. A sугólyuktól a színész feje búbja 10° -os emelkedési szögű.

a) Igazoljuk, hogy a színész feje egyenlő távolságra van az oszlop tetejétől és a sугólyuktól.

b) Milyen magas a színpadon felépített emelvény? (16 pont)

9. a) Egy dobozba 100 darab piros és zöld építőkockát raktak, méretük alapján kicsiket és nagyokat is. Kis piros kocka véletlenszerű kihúzásának ugyanannyi a valószínűsége, mint annak, hogy nagy pirosat vagy kis zöldet húzunk a dobozból. A zöldek és a kicsik aránya 7 : 11. A nagyok 20-szal kevesebben vannak, mint a pirosak. Hány kocka van az egyes fajtákból?

b) Egy dobozba 93 darab piros és zöld építőkockát raktak, méretük alapján kicsiket és nagyokat is. Mindegyik fajtából különböző prímszám darab van. A piros kockák száma osztható héttel. A kis zöld kockákból van a legkevesebb. Nagy pirosból ötvennel több van, mint kis pirosból. Hány kocka van az egyes fajtákból? (16 pont)