Megoldásvázlatok a 2012/7. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Melyik az a három természetes szám, melyek egy számtani sorozat egymást követő elemei, négyzetösszegük* 264, *valamint a szorzatuk egyenlő* 1792 *és a középső szám hányadosával?* (*10 pont*)

Megoldás. A számtani sorozat három egymást követő tagja: $b-d$, b, $b+d$, ahol b a középső elem és d a sorozat differenciája. A feladat szövege szerint:

$$(b-d)^2+b^2+(b+d)^2=b^2-2bd+d^2+b^2+b^2+2bd+d^2=3b^2+2d^2=264,$$
$$(b-d)b(b+d)=b\big(b^2-d^2\big)=b^3-bd^2=\frac{1792}{b}.$$

Az így kapott egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned}3b^2+2d^2&=264\\ b^4-b^2d^2&=1792\end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből: $d^2=132-\frac{3}{2}b^2$, ezt behelyettesítve a másodikba:

$$b^4-b^2\left(132-\frac{3}{2}b^2\right)=1792.$$

Ebből átalakításokkal b^2-re nézve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$5b^4-264b^2-3584=0,$$

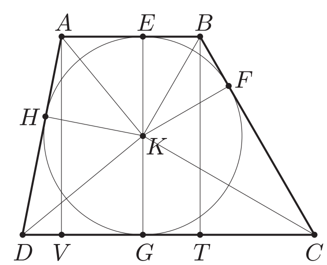
melynek egyik gyöke negatív, ezért nem lehet négyzetszám, a másik gyöke $b^2=64$, azaz $b=8$ (a $b=-8$ nem lehet, hiszen b természetes szám). Visszahelyettesítünk az első egyenletbe, így kapjuk, hogy $d=6$.

Tehát a három természetes szám a 2, 8 és 14.

2. *Mekkora annak az érintőtrapéznak a területe, amelynek egyik szára a* 7 cm *hosszú párhuzamos oldallal* 120 *fokos szöget zár be, valamint beírt körének sugara* 5 cm?

(*13 pont*)

Megoldás. Az *ábrán* a feladatban szereplő trapéz méretarányos rajzát látjuk, ahol $AB=7$, $KE=KF=KG=KH=5$ és $ABC=120°$. Használjuk az *ábra* jelöléseit.



A trapéz magassága a beírt kör átmérője, azaz $AV=EG=BT=10$. A terület kiszámításához a DC hosszára van szükség. $TCB=60°$, ezért a TCB derékszögű háromszögben $BT=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cdot TC=\sqrt{3}\cdot TC$, innen $TC=\frac{10}{\sqrt{3}}\approx 5{,}77$.

A DV szakasz hosszát az ADV derékszögű háromszögben kiszámolhatjuk, ehhez szükség van még egy szögre. Tudjuk, hogy a KEB derékszögű háromszögben B-nél $60°$-os szög van. Ezért

$$KE=\frac{\sqrt{3}}{2}KB=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cdot EB=\sqrt{3}\cdot EB,$$

innen $EB=\frac{5}{\sqrt{3}}\approx 2{,}89$, vagyis $AE=7-2{,}89=4{,}11$. Ezt felhasználva az AEK derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} EAK\sphericalangle=\frac{5}{4{,}11}$, innen $EAK\sphericalangle=50{,}58°$.

$$DAV\sphericalangle=2\cdot EAK\sphericalangle-90°=2\cdot 50{,}58°-90°=11{,}16°,$$

azaz

$$DV = AV \cdot \operatorname{tg} 11{,}16^\circ = 10 \cdot \operatorname{tg} 11{,}16^\circ \approx 1{,}97.$$

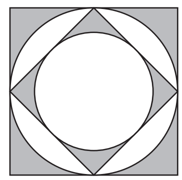
A keresett $DC = DV + VT + TC = 1{,}97 + 7 + 5{,}77 = 14{,}74$. A trapéz területe:

$$T = \frac{AB + DC}{2} \cdot AV = \frac{7 + 14{,}74}{2} \cdot 10 = 108{,}7 \ (\mathrm{cm}^2).$$

3. *Az* ábrán *egy egység oldalú négyzet, annak beírt köre, oldalfelező pontjai által meghatározott négyzet és annak is a beírt köre látható.*

a) Hány százalékát színeztük ekkor szürkére a nagy négyzetnek?

b) Ismételjük meg ezt az eljárást végtelen sokszor. Hány százalékát színeztük így szürkére a nagy négyzetnek? (*14 pont*)



Megoldás. *a*) A szürke terület a nagy négyzet és a nagy kör, illetve a kis négyzet és a kis kör területkülönbségének összege, vagyis:

$$T_{\text{szürke}} = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \pi = 1 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\pi \approx 0{,}322.$$

Tehát a négyzet területének kb. 32,2%-a szürke.

b) Észrevehetjük, hogy az egymásba írt négyzetek oldalai, illetve körök sugarai egy-egy mértani sorozatot alkotnak. Ezért a szürke terület:

$$T_{\text{szürke}} = 1 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\pi + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right)\pi.$$

A kérdéses terület meghatározásához két mértani sort kell összegeznünk:

$$T_{\text{szürke}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}}\pi = 2 - \frac{1}{2}\pi \approx 0{,}429.$$

Vagyis ebben az esetben a négyzet kb. 42,9%-a szürke.

Megjegyzés: A feladat mértani sorozat nélkül is megoldható.

4. *Adjuk meg azt a két egymást követő egész számot, amelyek közé esik a következő összeg:*

$$\lg\left(11 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \lg\left(11^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \lg\left(11^3 \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}\right) + \ldots + \lg\left(11^{500} \cdot \sqrt{\frac{999}{1001}}\right).$$

(*14 pont*)

Megoldás. Használjuk a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosságot:

$$\lg 11 + \lg\sqrt{\frac{1}{3}} + \lg 11^2 + \lg\sqrt{\frac{3}{5}} + \lg 11^3 + \lg\sqrt{\frac{5}{7}} + \ldots + \lg 11^{500} + \lg\sqrt{\frac{999}{1001}}.$$

Csoportosítsuk a tagokat:

$$\left(\lg 11 + \lg 11^2 + \ldots + \lg 11^{500}\right) + \left(\lg\sqrt{\frac{1}{3}} + \lg\sqrt{\frac{3}{5}} + \ldots + \lg\sqrt{\frac{999}{1001}}\right).$$

Az első zárójeles kifejezést tovább alakítjuk, a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\lg 11 + \lg 11^2 + \ldots + \lg 11^{500} = 1 \cdot \lg 11 + 2 \cdot \lg 11 + \ldots + 500 \cdot \lg 11 =$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 500) \cdot \lg 11 = \frac{500 \cdot (500 + 1)}{2} \cdot \lg 11 = 125\,250 \cdot \lg 11.$$

Most a második zárójelben lévő összeget hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\lg\sqrt{\frac{1}{2}}+\lg\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots+\lg\sqrt{\frac{999}{1000}}=\lg\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{3}{5}}\cdots\sqrt{\frac{999}{1001}}\right)=$$
$$=\lg\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{999}{1001}}=\lg\sqrt{\frac{1}{1001}}.$$

A keresett összeg: $125\,250\cdot\lg 11+\lg\sqrt{\frac{1}{1001}}\approx 130\,432{,}93$.

A két egymást követő egész szám: 130 432 és 130 433.

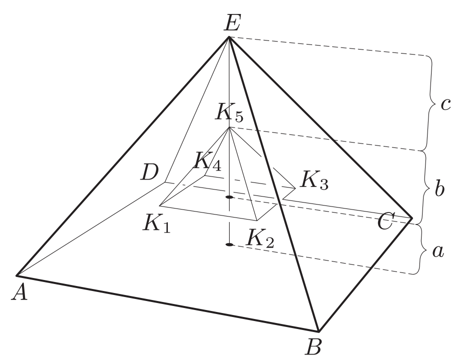
II. rész

5. *A* 2 cm *sugarú gömb alakú bonbonokat ötösével négyzet alapú, gúla alakú dobozokba csomagolják úgy, hogy négy kerül alulra, egy a tetejére. Minden alsó gömb érinti a felsőt és két szomszédos alsót, továbbá érinti a gúla alaplapját és két szomszédos oldallapját. A felső gömb mind a négy oldallapot érinti.*

a) *Milyen magas a doboz?*

b) *Mekkora a doboz felszíne?* (*16 pont*)

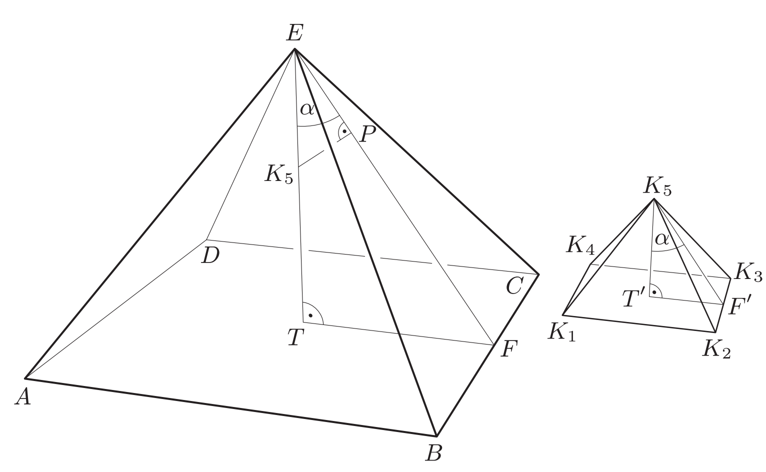
Megoldás. *a*) A feladat szövege szerint a gömbök K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 középpontjai az $ABCD$ dobozhoz hasonló, olyan négyzet alapú kis gúlát határoznak meg, melynek minden éle 4 cm, a magasságegyenese pedig egybeesik a „doboz" magasságegyenesével. (Ezek a gömbközéppontok a doboz megfelelő lapjaitól 2-2 centiméterre vannak.) A doboz magasságát a gúla három részre osztja.



Van egy alsó rész, ez $a=2$, mert ilyen távol vannak az alsó gömbök középpontjai az alaplaptól, azaz a kis gúla alaplapja a doboz aljától.

A második darab a kis gúla magassága, ezt a szakaszt a magasság, az egyik oldalél és az alaplap átlójának fele által meghatározott derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel segítségével számoljuk ki:

$$b^2=4^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\right)^2=16-8=8,\quad \text{ebből}\quad b=\sqrt{8}\approx 2{,}83.$$

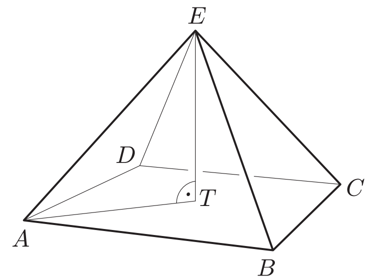


A harmadik, a felső szakasz meghatározásához azt a derékszögű háromszöget használjuk, melynek csúcsai: a két gúla csúcsa, és a felső gömb egyik oldallappal vett érintési pontja (azaz az EPK_5 háromszög). Ennek a háromszögnek a keresett c szakasz az átfogója, 2 cm az egyik befogója, vagyis $\sin\alpha = \frac{2}{c}$. Ennek a szögnek a szinusza a gúla két szemközti oldallapjának magassága által α meghatározott síkmetszeten, a $K_5T'F'$ derékszögű háromszögben is felírható:

$$\sin\alpha = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{azaz} \quad c = \frac{2}{\sin\alpha} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46.$$

A doboz magassága tehát: $m = a + b + c = 2 + 2{,}83 + 3{,}46 = 8{,}29$ (cm).

b) A felszín kiszámolásához szükségünk van a doboz éleinek hosszára.



Ezt a magasság, az egyik oldalél és az alaplap átlójának fele által meghatározott ATE derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel segítségével számoljuk ki:

$$m^2 = x^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

ebből

$$x = \sqrt{2\cdot m^2} = \sqrt{2\cdot 8{,}29^2} \approx 11{,}72,$$

$$A_{\text{doboz}} = T_{\text{alap}} + 4\cdot T_{\text{oldallap}} = 11{,}72^2 + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 11{,}72^2 \approx 375{,}27.$$

Vagyis a doboz felszíne kb. 375,27 cm^2.

6. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:*

a) $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+13}$;

b) $\dfrac{\log_2(x^3+26)}{\log_4(x+2)} = 6$;

c) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a négyzetgyökjelek alatti kifejezések nem lehetnek negatívak, azért a kikötés: $x \ge 0$.

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

$$x + 2x + 1 + 2\sqrt{x}\sqrt{2x+1} = 3x + 13.$$

Átrendezve: $\sqrt{x(2x+1)} = 6$. Ismét négyzetre emelünk:

$$x(2x+1) = 36, \qquad 2x^2 + x - 36 = 0.$$

A másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = 4$ és $x_2 = -\frac{9}{2}$, amelyek közül a második nem tesz eleget a kikötésnek.

Tehát a megoldás az $x = 4$, amit ellenőriztünk is.

b) A kikötés a logaritmusban szereplő kifejezésekre: $x^3 + 26 > 0$ és $x + 2 > 0$. A nevező pedig nem lehet nulla: $x \ne -1$. Összefoglalva: $x > -2$, de $x \ne -1$.

$$\begin{aligned}
\log_2\left(x^3+26\right) &= 6\cdot\log_4(x+2),\\
\frac{\log_4\left(x^3+26\right)}{\log_4 2} &= 6\cdot\log_4(x+2),\\
\log_4\left(x^3+26\right) &= 3\cdot\log_4(x+2),\\
\log_4\left(x^3+26\right) &= \log_4\left(x+2\right)^3,\\
x^3+26 &= (x+2)^3,\\
0 &= 6x^2+12x-18,\\
0 &= x^2+2x-3.
\end{aligned}$$

A két gyök: $x_1 = 1$ és $x_2 = -3$. Az egyenlet kikötései miatt csak az $x = 1$ a megoldás.

c) Alakítsuk az egyenletet:

$$\begin{aligned}
2\sin^2 x + 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x &= 2,\\
2\sin^2 x + 4\sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right) &= 2,\\
2\sin^2 x + 4\sin^2 x - 4\sin^4 x &= 2,\\
0 &= 4\sin^4 x - 6\sin^2 x + 2,\\
0 &= 2\left(\sin^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x + 1.
\end{aligned}$$

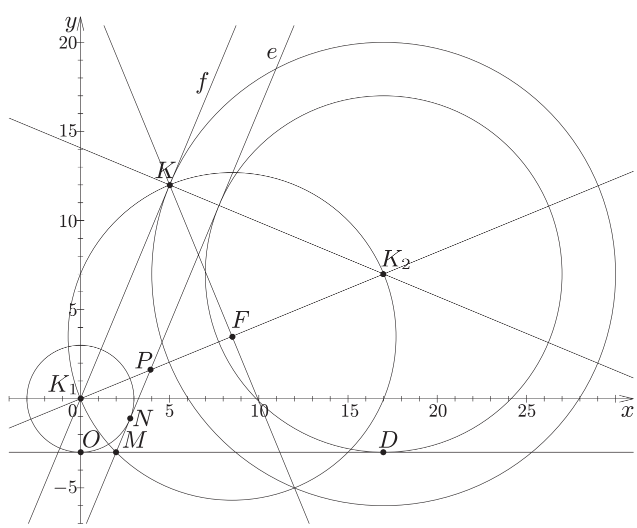
A másodfokú egyenlet gyökei 1 és $\frac{1}{2}$, ebből $\sin x$-re 4 egyenlet adódik:

$$\begin{array}{lll}
\sin x = 1, & \text{ekkor } x_1 = \frac{\pi}{2} + 2l_1\pi, \text{ ahol } l_1 \in \mathbb{Z}; & \\
\sin x = -1, & \text{ekkor } x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2l_2\pi, \text{ ahol } l_2 \in \mathbb{Z}; & \\
\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{ekkor } x_3 = \frac{\pi}{4} + 2m\pi, \text{ ahol } m \in \mathbb{Z}, & x_4 = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \text{ ahol } n \in \mathbb{Z};\\
\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{ekkor } x_5 = \frac{5\pi}{4} + 2p\pi, \text{ ahol } p \in \mathbb{Z}, & x_6 = \frac{7\pi}{4} + 2q\pi, \text{ ahol } q \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

Az egyenlet megoldása összefoglalva: $x = \frac{k\pi}{4}$, ahol k néggyel nem osztható egész szám.

7. *Adott a koordinátarendszerben a* $k_1\colon x^2 + y^2 = 9$ *és a* $k_2\colon (x-17)^2 + (y-7)^2 = 100$ *kör. Igazoljuk, hogy a két kör vízszintes közös külső és a pozitív meredekségű közös belső érintőjének metszéspontjából derékszögben látszik a két kör középpontja által meghatározott szakasz.* (*16 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit.



Kiszámoljuk a két érintő M metszéspontját, majd megvizsgáljuk a K_1MK_2 nagyságát. Az adatok alapján a két kör vízszintes közös külső érintőjének egyenlete: $y = -3$. A pozitív meredekségű közös belső e érintő párhuzamos és 3 egység távolságra van a K_2 középpontú, 13 sugarú körhöz a K_1-ből (az origóból) húzott f érintővel.

A K_1K egyenes normálvektorának meghatározásához szükségünk van a K pont koordinátáira. A K_1K_2K derékszögű háromszög két oldalának ismeretében számoljuk ki a harmadik oldal hosszát. Mivel $K_1K_2 = \sqrt{17^2 + 7^2} = \sqrt{338}$, $KK_2 = 10 + 3 = 13$, azért $K_1K = \sqrt{338 - 13^2} = 13$.

A K pont koordinátáit úgy számoljuk ki, hogy az F pontba mutató helyvektorhoz, azaz $\overrightarrow{OF}(8{,}5; 3{,}5)$ vektorhoz hozzáadjuk az $\overrightarrow{FK_1}$ vektor -90 fokos elforgatottját, vagyis az $\overrightarrow{FK}(-3{,}5; 8{,}5)$ vektort. Így tehát a keresett koordináták: $K(5; 12)$. Az $(5; 12)$ a belső érintő egyik irányvektorának a koordinátája, így egy normálvektorának $(12; -5)$ a koordinátája. Ez lesz a belső érintő normálvektora is.

A belső érintő egyenletének felírásához számoljuk ki a belső érintő és a középpontokat összekötő egyenes P metszéspontjának koordinátáit, mely a két kör hasonlóságának középpontja, ezért a K_1K_2 szakaszt $3 : 13$ arányban osztja. Ezek alapján a P pont koordinátái: $\left(17 \cdot \frac{3}{13}; 7 \cdot \frac{3}{13}\right)$, azaz $P\left(\frac{51}{13}; \frac{21}{13}\right)$. A belső érintő egyenlete:

$$12x - 5y = 12 \cdot \frac{51}{13} - 5 \cdot \frac{21}{13} = 39.$$

A két érintő M metszéspontját a következő egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{aligned} y&=-3\\ 12x-5y&=39 \end{aligned}\right\}.$$

Vagyis: $M(2;-3)$.

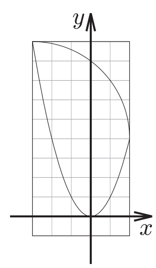
Végezetül megmutatjuk, hogy $\overrightarrow{K_1M}\cdot\overrightarrow{MK_2}=0$. Az ismert koordináták alapján: $\overrightarrow{K_1M}(2;-3)$, $\overrightarrow{MK_2}(15;10)$. Tehát valóban $\overrightarrow{K_1M}\cdot\overrightarrow{MK_2}=2\cdot 15-3\cdot 10=0$. Ez azt jelenti, hogy a két érintő M metszéspontjából valóban derékszögben látszik a K_1K_2 szakasz.

Megjegyzés. A **B. 4468.** feladatból következik, hogy az itt megfogalmazott állítás nem csak erre a konkrét esetre igaz, vagyis: Két kör közös külső és közös belső érintőjének metszéspontjából mindig derékszögben látszik a két kör középpontja által meghatározott szakasz.

8. *A szabó egy farsangi pillangójelmezhez az* ábrán *látható mintát használja, amit a boltban vásárolt téglalap alakú anyagból vág ki. A szabásminta egy parabolaívből és egy körívből áll.*

a) Az anyag hány százaléka lesz hulladék?

b) Adjuk meg a parabola és a kör összes metszéspontját. *(16 pont)*



Megoldás. *a)* Tegyünk a szabásmintára egy koordinátarendszert az *ábrán* látható módon. Ekkor a parabola az $f(x)=x^2$ hozzárendeléssel megadott függvény képe lesz. A parabola alatti területet (az x tengelyig) a következő integrállal határozhatjuk meg:

$$\int_{-3}^{2} x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2}=\frac{2^3}{3}-\frac{(-3)^3}{3}=\frac{35}{3}.$$

Az x tengely alatti rész területe 5, így az itt keletkezett hulladék:

$$\frac{35}{3}+5=\frac{50}{3}\approx 16{,}667.$$

A jobb felső rész esetén egy ötször ötös négyzetből hiányzik egy öt sugarú negyedkör. Vagyis ennek a hulladéknak a területe:

$$25-\frac{25\pi}{4}\approx 5{,}365.$$

Ezek alapján az összes hulladék: 22,032. Az eredeti téglalap területe 50, vagyis az anyagnak kb. a 44,1%-a lesz hulladék.

b) A parabola egyenlete $y=x^2$. A kör sugara 5 egység, középpontjának koordinátája pedig $(-3;4)$. A kör egyenlete: $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. A metszéspontok meghatározásához a két egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenlet az x^2 behelyettesítése után így írható:

$$\begin{aligned} x^2+6x+9+x^4-8x^2+16&=25,\\ x^4-7x^2+6x&=0,\\ x\left(x^3-7x+6\right)&=0. \end{aligned}$$

Mivel az eredeti szabásmintán adott volt két metszéspont (az $x=-3$-nál és az $x=2$-nél), azért könnyen felírhatjuk a gyöktényezős alakot: $x(x+3)(x-2)(x-1)=0$. Visszahelyettesítéssel az első koordinátákhoz meghatározzuk a metszéspontok második koordinátáját is. Négy metszéspontot kaptunk. Helyüket az általunk bevezetett koordinátarendszer segítségével adjuk meg: $(-3;9)$, $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;4)$.

9. *A* 2012*-es londoni olimpián csapatunk* 8 *arany-,* 4 *ezüst- és* 5 *bronzérmet szerzett. Nem volt olyan versenyszám, amiben két magyar érem született.*

a) Hányféleképpen sorolhatjuk föl azokat a versenyszámokat, amelyekben csapatunk érmet szerzett, úgy, hogy először az aranyérmesek, utána az ezüstérmesek, végül a bronzérmesek versenyszámait nevezzük meg?

b) Hányféleképpen sorolhatjuk fel a fenti 17 *versenyszámot, ha az azonos színű érmet hozó számok közül mindig azt soroljuk fel hamarabb, amelyik korábban ért véget?*

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az érmes versenyszámaink közül véletlenszerűen hármat választva az azokhoz tartozó érmek különböző színűek lesznek? *(16 pont)*

Megoldás. *a*) A 8 aranyérem, a 4 ezüstérem és az 5 bronzérem permutációinak szorzatát kell vennünk: $8! \cdot 4! \cdot 5! = 116\,121\,600$.

b) A feladat szerint három, egyenként 8, 4 és 5 hosszú, meghatározott sorrendű sorozatot kell egymásba fésülni. A 8 aranyérmeshez 9 helyre kerülhetnek az ezüstérmesek, de akár többen is egy helyre. Vagyis ismétléses kombinációval kell számolnunk, és így ez $\binom{12}{4}$-féleképpen lehetséges. Az így kapott 12 hosszú sorozatban 13 helyre kerülhetnek a bronzérmesek, ez $\binom{17}{5}$-féle lehetőség.

Összesen tehát $\binom{12}{4} \cdot \binom{17}{5} = 3\,063\,060$ felsorolás létezik.

c) A 17 éremből hármat választunk, ezért az összes eset száma $\binom{17}{3}$.

A 8 aranyéremből egyet, a 4 ezüstéremből egyet és az 5 bronzéremből egyet $8 \cdot 4 \cdot 5$-féleképpen lehet kiválasztani. Vagyis a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 5}{\binom{17}{3}} \approx 0{,}235.$$

Gedeon Veronika
(Budapest)